

1

(1)

A の表す一次変換によって $P(1, 0)$ が $Q(0, -2)$ に移ることから

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

A の表す一次変換によって $Q(0, -2)$ が $R(1, 1)$ に移ることから

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2)

$$B = k \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$B^2 = k^2 \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^2 = k^2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

B^2 の表す一次変換は点 P を点 Q に移動させることから,

$$k^2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{cases} k^2 \cos 2\theta = 0 \\ k^2 \sin 2\theta = -2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\dots \textcircled{4}$$

となる。 $k \neq 0, 0^\circ < \theta < 180^\circ$ と③より

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 0 \\ \therefore \theta &= 45^\circ, 135^\circ \end{aligned}$$

[1] $\theta = 45^\circ$ のとき

④に代入すると,

$$k^2 = -2$$

となり, これを満たす実数 k は存在しない。よって不適である。

[2] $\theta = 135^\circ$ のとき

④に代入すると,

$$\begin{aligned} k^2 &= 2 \\ \therefore k &= \sqrt{2} \quad (\text{Q } k > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \theta = 135^\circ, k = \sqrt{2}$$

(3)

$$\begin{aligned} AB^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= AB \cdot 2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= A \cdot \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad \text{点 } (-1, 3)$$

(1)

条件より, $0 \leq \theta < 360^\circ$ として

$$P_1(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$P_2(-r \cos \theta, -r \sin \theta)$$

とおける。点 $Q(x, y)$ とおくと,

$$\begin{aligned} L &= QP_1^2 + QP_2^2 \\ &= (r \cos \theta - x)^2 + (r \sin \theta - y)^2 + (-r \cos \theta - x)^2 + (-r \sin \theta - y)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \theta - 2rx \cos \theta + x^2 + r^2 \sin^2 \theta - 2ry \sin \theta + y^2 \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta + 2rx \cos \theta + x^2 + r^2 \sin^2 \theta + 2ry \sin \theta + y^2 \\ &= 2r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2x^2 + 2y^2 \\ &= 2r^2 + 2x^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

となる。したがって L は θ の値によらないので, P_1, P_2 のとり方に依存しない。

(証明終)

(2)

点 Q は放物線 $y = -x^2 + 5x - 8$ 上にあるので,

$$\begin{aligned} L &= 2r^2 + 2x^2 + 2(-x^2 + 5x - 8)^2 \\ &= 2r^2 + 2x^2 + 2(x^4 + 25x^2 + 64 - 10x^3 + 16x^2 - 80x) \\ &= 2r^2 + 2(x^4 - 10x^3 + 42x^2 - 80x + 64) \end{aligned}$$

ここで, $f(x) = x^4 - 10x^3 + 42x^2 - 80x + 64$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 30x^2 + 84x - 80 \\ &= 2(2x^3 - 15x^2 + 42x - 40) \\ &= 2(x - 2)(2x^2 - 11x + 20) \end{aligned}$$

ここで $2x^2 - 11x + 20 = 2\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{39}{8} > 0$ なので, 増減表は以下ようになる。

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	8	$\nearrow$

したがって $f(x)$ は $x = 2$ のとき最小値 8 をとる。このとき L も最小値をとり, その値は

$$L = 2r^2 + 2 \cdot 8 = 2r^2 + 16$$

である。このとき点 Q の y 座標は

$$-2^2 + 5 \cdot 2 - 8 = -2$$

である。

(答) $Q(2, -2)$ のとき最小値 $L = 2r^2 + 16$

(1)

[1] $p=0$ のとき方程式(*)は $x=q$ という実数解を持つ。[2] $p \neq 0$ のとき

$$(*) \Leftrightarrow px^2 + (ap+1)x + bp - q = 0$$

であるから、この2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (ap+1)^2 - 4p(bp-q) \\ &= (a^2-4b)p^2 + (2a+4q)p + 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、方程式(*)が0以外の任意の実数 p に対して実数解を持つためには、0以外の任意の実数 p に対して $D \geq 0$ となることが必要である。

仮に $a^2-4b < 0$ だと仮定すると、 $p \rightarrow \pm\infty$ のとき $D \rightarrow -\infty$ となるので、これは0以外の任意の実数 p に対して $D \geq 0$ となることに反している。

したがって、方程式(*)が0以外の任意の実数 p に対して実数解を持つためには、 $a^2-4b < 0$ ではない、すなわち $a^2-4b \geq 0$ であることが必要条件である。

以上[1], [2]より、方程式(*)が任意の実数 p に対して実数解を持つためには、 $a^2-4b \geq 0$ であることが必要条件である。

(証明終)

(2)

[1] $a^2-4b > 0$ のとき p に関する2次方程式

$$(a^2-4b)p^2 + (2a+4q)p + 1 = 0$$

を考える。この方程式の判別式を D_2 とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= (a+2q)^2 - a^2 + 4b \\ &= a^2 + 4aq + 4q^2 - a^2 + 4b \\ &= 4(q^2 + aq + b) \end{aligned}$$

となる。ここで、方程式(*)が常に実数解を持つには、 $a^2-4b > 0$ のもとでは $D_2 \leq 0$ であ

れば良い。方程式 $x^2+ax+b=0$ の2解を α, β としたことから、 $D_2 \leq 0$ となる q の範囲 R

は、

$$\alpha \leq q \leq \beta$$

と表せる。

[2] $a^2-4b=0$ のとき

$$D = (2a+4q)p + 1$$

において、任意の実数 p に対して $D \geq 0$ が成り立てば良いので、

$$2a+4q=0 \Leftrightarrow q = -\frac{a}{2}$$

となれば良い。ここで、 $a^2-4b=0$ より $b = \frac{a^2}{4}$ となるので、

$$\begin{aligned} x^2+ax+b &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2+ax+\frac{a^2}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

より、 $\alpha = \beta = -\frac{a}{2}$ である。したがって $\alpha = q = \beta$ が成り立つ。

以上[1], [2]を合わせて、任意の実数 p に対して方程式(*)が実数解を持つには、 q が

範囲 R : α 以上、 β 以下

にあれば良い。

(答) 範囲 R : α 以上、 β 以下

(3)

$f(x) = p(x^2+ax+b) + x - q$ とおく。方程式 $f(x) = 0$ が範囲 R に少なくとも1つの解を持つこ

とを示す。 α, β の定義から $\alpha^2+a\alpha+b=0, \beta^2+a\beta+b=0$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= p(\alpha^2+a\alpha+b) + \alpha - q = \alpha - q \\ f(\beta) &= p(\beta^2+a\beta+b) + \beta - q = \beta - q \end{aligned}$$

となる。 $\alpha \leq q \leq \beta$ であるので、

$$f(\alpha)f(\beta) \leq 0$$

が成り立つ。 $f(x)$ は連続な関数であるから、方程式 $f(x) = 0$ は $\alpha \leq x \leq \beta$ に少なくとも1つ

の解を持つ。

(証明終)

(1)

$C_1: y = f(x) = x + \log x$, $C_2: y = g(x) = -\log x$ とおくと,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}, g'(x) = -\frac{1}{x}$$

より, 点 P, Q における接線の方程式は

$$l_1: y = \left(1 + \frac{1}{a}\right)(x - a) + a + \log a = \left(1 + \frac{1}{a}\right)x + \log a - 1$$

$$l_2: y = -\frac{1}{a}(x - a) - \log a = -\frac{1}{a}x - \log a + 1$$

となる。 l_1 と $x=0$ の交点は $(0, \log a - 1)$, l_2 と $x=0$ の交点は $(0, -\log a + 1)$, l_1 と l_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a}\right)x + \log a - 1 &= -\frac{1}{a}x - \log a + 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2a}{a+2}(1 - \log a) \end{aligned}$$

である。よって 3 直線の囲む部分の面積 S は, $0 < \log a < 1$ より,

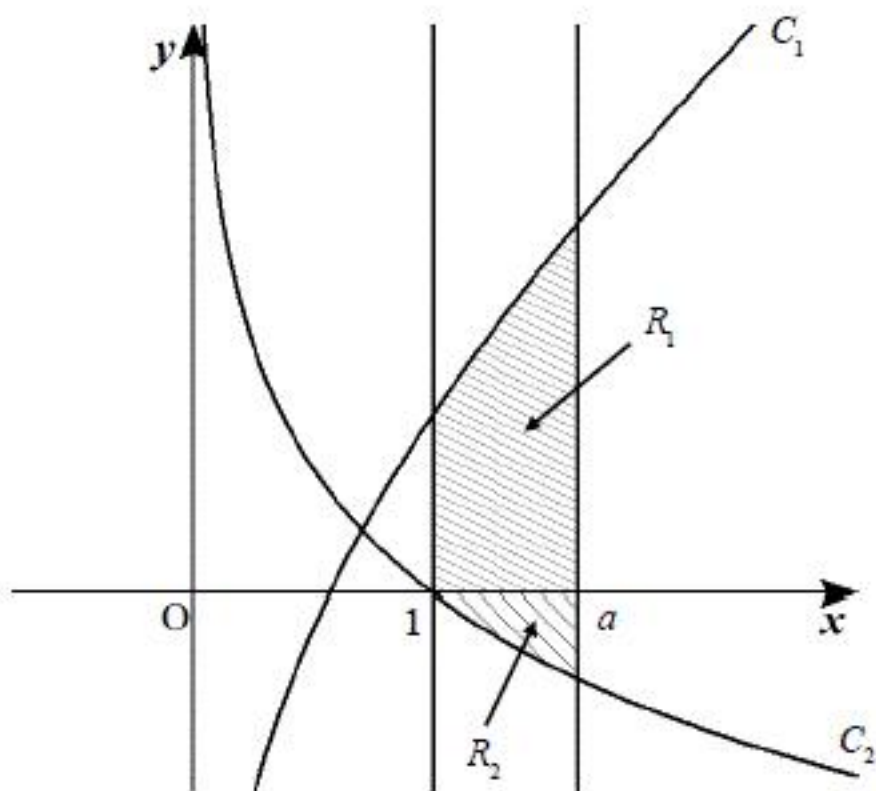
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{2a}{a+2}(1 - \log a) \right\} \cdot 2(1 - \log a) \\ &= \frac{2a}{a+2}(1 - \log a)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{2a}{a+2}(1 - \log a)^2$$

(2)

グラフの概形は以下のようになる。



したがって, 体積 V は

$$\begin{aligned} V &= B_1 - B_2 \\ &= \pi \int_1^a (\log x + x)^2 dx - \pi \int_1^a (-\log x)^2 dx \\ &= \pi \int_1^a (x^2 + 2x \log x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \log x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^a \\ &= \pi \left(\frac{1}{3}a^3 + a^2 \log a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad V = \pi \left(\frac{1}{3}a^3 + a^2 \log a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6} \right)$$