

1

(1)

$$y = x^2 - 4x + a$$

$$y' = 2x - 4$$

であり、また、

$$y = 6\log x$$

$$y' = \frac{6}{x}$$

である。点Pのx座標を t ($t > 0$)とおくと

$$2t - 4 = \frac{6}{t}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3, -1$$

となり、 $t > 0$ より $t = 3$ であるから、点Pの座標は $(3, 6\log 3)$ となる。また、

$$6\log 3 = 3^2 - 4 \cdot 3 + a$$

$$\therefore a = 6\log 3 + 3$$

である。

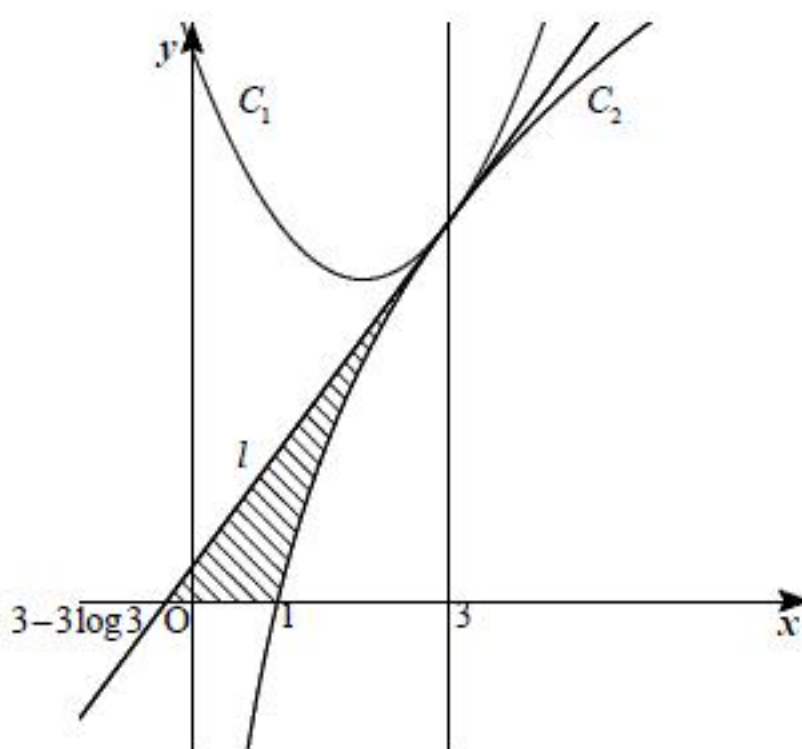
(答) $a = 6\log 3 + 3$, 点Pの座標 $(3, 6\log 3)$

(2)

接線 l の方程式は、傾きが2なので、

$$y = 2x + 6\log 3 - 6$$

となる。求める面積は、下図の斜線部である。



面積 S は

$$S = \int_{3-3\log 3}^3 (2x + 6\log 3 - 6) dx - \int_1^3 6\log x dx$$

$$= \left[x^2 + 6(\log 3 - 1)x \right]_{3-3\log 3}^3 - 6 \left[x(\log x - 1) \right]_1^3$$

$$= 9 - 9(\log 3 - 1)^2 + 18(\log 3 - 1) + 18(\log 3 - 1)^2 - 18(\log 3 - 1) + 6 \cdot (-1)$$

$$= 9(\log 3 - 1)^2 + 3$$

$$= 9(\log 3)^2 - 18\log 3 + 12$$

である。

(答) $9(\log 3)^2 - 18\log 3 + 12$

(1)

$P_1(a, a \tan \theta)$, $P_2\left(b \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), b\right)$ と表せるので, $\triangle OP_1P_2$ の面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \left| ab - a \tan \theta \cdot b \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right| \\
 &= \frac{ab}{2} \left| 1 - \tan \theta \cdot \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right| \\
 &= \frac{ab}{2} \left| 1 - \frac{\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta} \right| \\
 &= ab \left| \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - (\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta)}{2 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} \right| \\
 &= \frac{ab}{\sin 2\theta + \cos 2\theta + 1}
 \end{aligned}$$

(証明終)

(2)

$$\sin 2\theta + \cos 2\theta = \sqrt{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

であるので, $\theta = \frac{\pi}{8}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。このとき S は最小となり,

$$S = \frac{ab}{\sqrt{2} + 1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{ab}{\sqrt{2} + 1} \quad (\theta = \frac{\pi}{8} \text{ のとき})$$

(1)

直線 AB の方程式は

$$y = -\frac{b}{a}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow bx + ay - ab = 0$$

であるので、

$$ME = p, MF = q, MG = \frac{|bp + aq - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。 $bp + aq - ab < 0$ であるので、

$$L = \frac{pq(ab - bp - aq)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad L = \frac{pq(ab - bp - aq)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2)

 $0 < p < a, 0 < q < b$ より

$$bp + aq - ab < 0$$

$$\therefore 0 < p < \frac{a(b-q)}{b}$$

である。

$$L = \frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2}} \{-bp^2 + a(b-q)p\}$$

$$= \frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[-b \left\{ p - \frac{a(b-q)}{2b} \right\}^2 + \frac{a^2(b-q)^2}{4b} \right]$$

であるので、 $p = \frac{a(b-q)}{2b}$ のとき最大値 $\frac{a^2 q(b-q)^2}{4b\sqrt{a^2 + b^2}}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad L_1 = \frac{a^2 q(b-q)^2}{4b\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (p = \frac{a(b-q)}{2b} \text{ のとき})$$

(3)

$$\frac{dL_1}{dq} = \frac{a^2}{4b\sqrt{a^2 + b^2}} \{(b-q)^2 - 2q(b-q)\}$$

$$= \frac{a^2}{4b\sqrt{a^2 + b^2}} (3q^2 - 4bq + b^2)$$

$$= \frac{a^2}{4b\sqrt{a^2 + b^2}} (3q-b)(q-b)$$

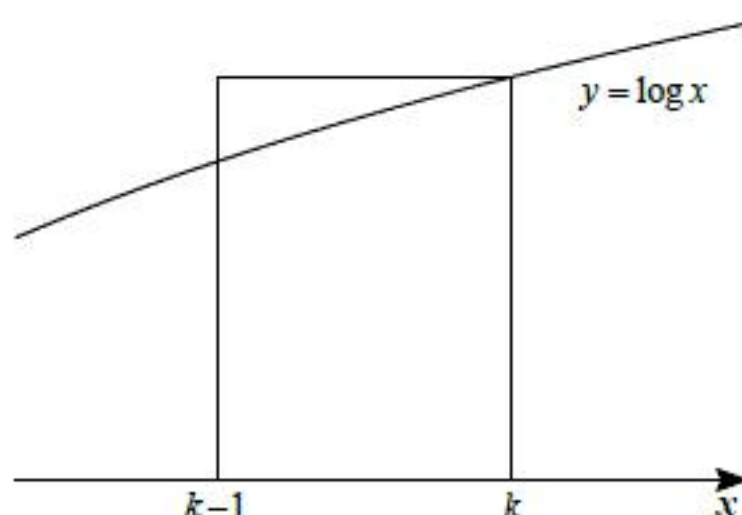
であるので、増減表は次のようになる。

q	0		$\frac{b}{3}$		b
$\frac{dL_1}{dq}$		+	0	-	
L_1			$\frac{a^2 b^2}{27\sqrt{a^2 + b^2}}$		

したがって、 $q = \frac{b}{3}$ のとき最大値 $\frac{a^2 b^2}{27\sqrt{a^2 + b^2}}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad L_2 = \frac{a^2 b^2}{27\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (q = \frac{b}{3} \text{ のとき})$$

(1)



k を 2 以上 n 以下の自然数とする。 $y = \log x$, $x = k-1$, $x = k$ と x 軸に囲まれた部分の面積は、上図の長方形より小さいので、

$$\int_{k-1}^k \log x dx < \log k$$

である。 $k=2$ から n までを足し合わせると、

$$\int_1^n \log x dx < \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$$

となる。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= [x(\log x - 1)]_1^n \\ &= n(\log n - 1) + 1 \\ &> n(\log n - 1) \end{aligned}$$

であるので、(1)より

$$n(\log n - 1) < \log n!$$

となる。 $y = e^x$ は単調増加関数なので、

$$e^{n(\log n - 1)} < n!$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{n!} < \frac{a^n}{e^{n(\log n - 1)}} = \left(\frac{a}{e^{(\log n - 1)}} \right)^n$$

となる。ここで a は正の実数である。 n が十分大きいとき $\frac{a}{e^{(\log n - 1)}} < 1$ であるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{e^{(\log n - 1)}} \right)^n = 0$$

である。また、

$$\frac{a^n}{n!} > 0$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

である。

(証明終)

(3)

$$2 + \frac{n}{n+1} < 3$$

であり、

$$0 < \frac{\left(2 + \frac{n}{n+1}\right)^n}{n!} < \frac{3^n}{n!}$$

が成り立つ。(2)より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

であるので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{n}{n+1}\right)^n}{n!} = 0$$

である。

(証明終)