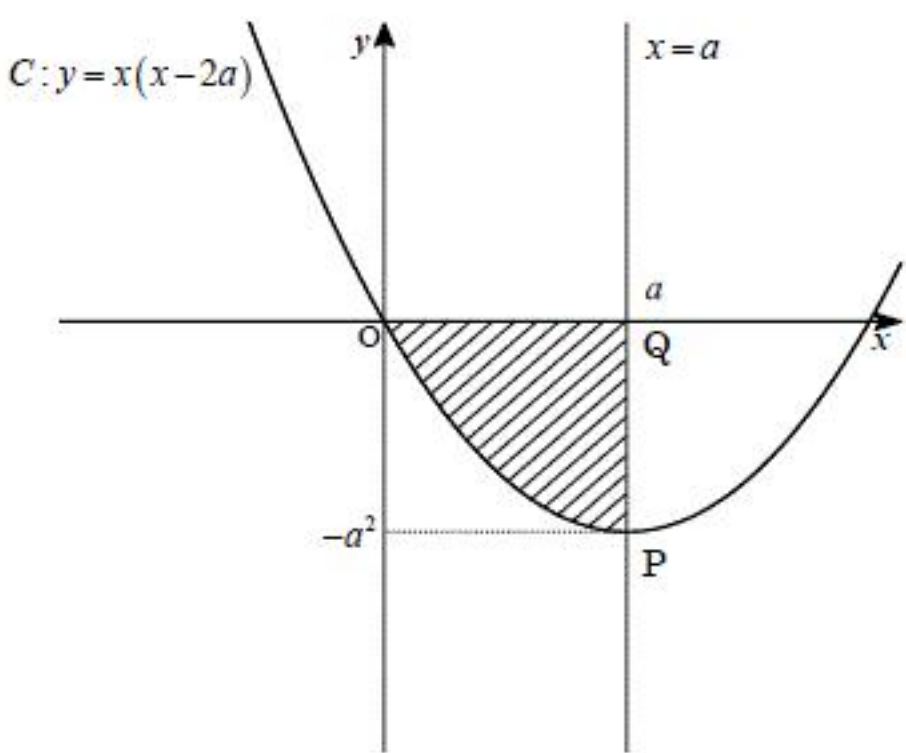


1

(1)

S は下図斜線部の領域の面積である。



図より積分区間は $0 \leq x \leq a$ であり、この区間で放物線は常に x 軸よりも常に下側にあるので、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \{-x(x-2a)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{2}{3}a^3$

(2)

点 R は C 上を原点 O から P まで動くので $R(r, r(r-2a))$ と置ける。ただし $0 \leq r \leq a$ とする。

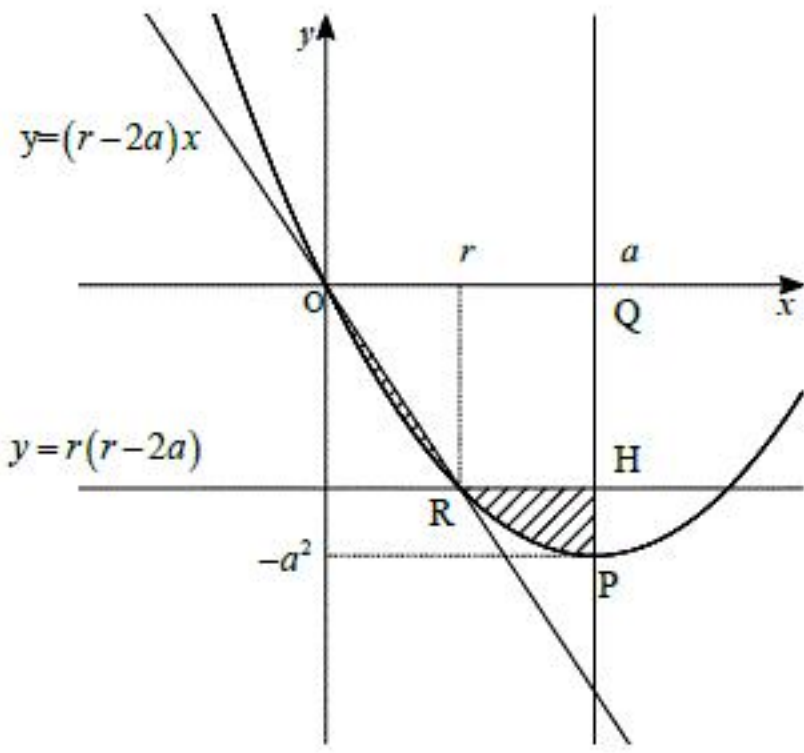
台形 $ORHQ$ の面積を U とすると図から $S = T + U$ であることが分かる。ここで U は

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \cdot \{a + (a-r)\} \cdot \{-r(2a-r)\} \\ &= \frac{1}{2}r^3 - 2ar^2 + 2a^2r \end{aligned}$$

である。したがって(1)の結果とあわせると T は

$$\begin{aligned} T &= S - U \\ &= -\frac{1}{2}r^3 + 2ar^2 - 2a^2r + \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

となる。これを $f(r)$ と置く。



$f(r)$ の区間 $0 \leq r \leq a$ における最小値を考えればよい。 $f(r)$ を微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} f'(r) &= -\frac{3}{2}r^2 + 4ar - 2a^2 \\ &= -\frac{1}{2}(3r-2a)(r-2a) \end{aligned}$$

$0 \leq r \leq a$ から $-(r-2a) \geq 0$ であるので、 $f'(r)$ の符号は、 $(3r-2a)$ の符号と同じである。したがって $f(r)$ の増減表は次のようになる。

r	0	...	$\frac{2}{3}a$	...	a
$f'(r)$	-	-	0	+	+
$f(r)$		$\searrow$		$\nearrow$	

これより $f(r)$ が $0 \leq r \leq a$ において最小となるのは $r = \frac{2}{3}a$ となるときであり、その最小値は

$$f\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{27}a^3$$

であることが分かる。

(答) $\frac{2}{27}a^3$

(1)

漸化式 $a_1 = 1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n}$ より帰納的に $a_n > 0$ である。したがって数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{1}{a_n}$ と定義することが出来る。漸化式より

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{a_n + 2}{a_n} \\ &= 2b_n + 1 \end{aligned}$$

となる。これは

$$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

と変形できるので、数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列である。よって、

その一般項は

$$b_n = 2^n - 1$$

である。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

(2)

求める和を S_n とする。(1)の結果を代入すると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{ka_k}{1+a_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k \frac{1}{2^k - 1}}{1 + \frac{1}{2^k - 1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} 2S_n &= 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \text{L} + \frac{n}{2^{n-1}} \\ S_n &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \text{L} + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \text{L} + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

(1)

直方体 OADB-CEGF において、 $AD = OB$ かつ $AD \parallel OB$ 、 $DG = OC$ かつ $DG \parallel OC$ であるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{OC} = \vec{c}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

(2)

点 P は直線 OG 上にあるのでパラメーター t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OG} \\ &= t\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

と表すことができる。また、点 P が平面 DEF 上にあることより、ある実数 u, v を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP} &= u\overrightarrow{DE} + v\overrightarrow{DF} \\ &= u(-\vec{b} + \vec{c}) + v(-\vec{a} + \vec{c}) \\ &= -v\vec{a} - u\vec{b} + (u+v)\vec{c}\end{aligned}$$

と置ける。これを用いると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) + \{-v\vec{a} - u\vec{b} + (u+v)\vec{c}\} \\ &= (1-v)\vec{a} + (1-u)\vec{b} + (u+v)\vec{c}\end{aligned}$$

のようにも表せる。 $\overrightarrow{OP}$ の 2通りの表式の係数を比較すると、

$$\begin{cases} 1-v = t \\ 1-u = t \\ u+v = t \end{cases}$$

が成り立たなければならないので、これを解くと

$$u = v = \frac{1}{3}, t = \frac{2}{3}$$

となる。以上より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

(3)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は互いに直行することに注意すると、与えられた各ベクトルの大きさから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$|\vec{a}|^2 = 4, |\vec{b}|^2 = 1, |\vec{c}|^2 = 1$$

である。また(2)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} &= \frac{2}{9}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}) \\ &= \frac{2}{9}(-|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2) \\ &= \frac{2}{9}(-4 + 2 + 2) \\ &= 0\end{aligned}$$

と計算できる。したがって、 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{AP}$ は直交する。

(証明終)

(1)

まず,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

より,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - e^{-x} + ax) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left\{ 1 - \left(\frac{1}{e^x} \right)^2 + a \cdot \frac{x}{e^x} \right\} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

である。次に, $t = -x$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} - e^t - at) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^t \left\{ \left(\frac{1}{e^t} \right)^2 - 1 - a \cdot \frac{t}{e^t} \right\} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(2)

$$f'(x) = e^x + e^{-x} + a$$

$$f''(x) = e^x (1 - e^{-2x})$$

より, $f'(x)$ は $x > 0$ の範囲で単調増加し, $x < 0$ の範囲で単調減少する。また, $a < -2$ より

$$f'(0) = 2 + a < 0$$

であり,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty > 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty > 0$$

となるので, $f(x)$ の連続性より

$$\begin{aligned} \alpha &< 0 < \beta \\ f'(\alpha) &= f'(\beta) = 0 \end{aligned}$$

を満たす実数 α, β が存在する。 α, β 以外に $f'(x) = 0$ となるような x は存在しないので, $f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	正	$\searrow$	0	$\searrow$	負	$\nearrow$	$+\infty$

 $f(0) = 0$ およびグラフの増減より, $f(\alpha) > 0, f(\beta) < 0$ だとわかる。

以下, 交点をひとつずつ考察する。

まず, $\alpha < x < \beta$ において, $f(x)$ は単調減少かつ連続であり

$$f(\alpha) > 0, f(\beta) < 0$$

であるから, $y = f(x)$ のグラフは $\alpha < x < \beta$ においてただ 1 点 ($x = 0$) で x 軸と交わる。次に, $x < \alpha$ において, $f(x)$ は単調増加かつ連続であり

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0, f(\alpha) > 0$$

であるから, $y = f(x)$ のグラフは $x < \alpha$ においてただ 1 点で x 軸と交わる。最後に, $x > \beta$ において, $f(x)$ は単調増加かつ連続であり

$$f(\beta) < 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$$

であるから, $y = f(x)$ のグラフは $x > \beta$ においてただ 1 点で x 軸と交わる。以上より, $y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 3 点で交わることが示された。

(証明終)