

1

(1)

$$f_2(x) = |x - a_1| + |x - a_2|$$

となる。ここで x の値により 3 つに場合分けする。

[1] $x < a_1$ の場合

$$x - a_2 < a_1 - a_2 < 0 \text{ より } |x - a_2| > a_2 - a_1 \text{ であり, } |x - a_1| > 0 \text{ なので } f_2(x) > a_2 - a_1 \text{ である。}$$

[2] $a_1 \leq x \leq a_2$ の場合

$$\begin{aligned} |x - a_1| &= x - a_1 \text{ および } |x - a_2| = a_2 - x \text{ より,} \\ f_2(x) &= x - a_1 + a_2 - x \\ &= a_2 - a_1 \end{aligned}$$

となる。

[3] $x > a_2$ の場合

$$|x - a_1| > a_2 - a_1 \text{ であり, } |x - a_2| = x - a_2 > 0 \text{ なので } f_2(x) > a_2 - a_1 \text{ である。}$$

以上, [1], [2], [3] より,

$$f_2(x) \text{ は } a_1 \leq x \leq a_2 \text{ のときに最小値 } a_2 - a_1 \text{ をとる} \quad \dots \textcircled{1}$$

ことがわかる。いま, $a_1 = 1, a_2 = 2$ であったから, 求める最小値は,

$$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \ 1 \leq x \leq 2 \text{ のとき } f_2(x) = 1$$

(2)

$$f_3(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \text{ となる。} \ x \text{ の値により 3 つに場合分けする。}$$

[1] $x < 1$ の場合

$$x - 2 < -1 \text{ および } x - 3 < -2 \text{ より } |x - 2| > 1 \text{ と } |x - 3| > 2 \text{ であり, } |x - 1| > 0 \text{ なので } f_3(x) > 3 \text{ である。}$$

[2] $1 \leq x \leq 3$ の場合

$$\begin{aligned} |x - 1| &= x - 1 \text{ および } |x - 3| = 3 - x \text{ より,} \\ f_3(x) &= x - 1 + |x - 2| + 3 - x \\ &= 2 + |x - 2| \end{aligned}$$

となるので, $f_3(x) \geq 2$ であり, $x = 2$ のとき最小値 2 をとる。

[3] $x > 3$ の場合

$$|x - 1| > 2 \text{ と } |x - 2| > 1, \ |x - 3| > 0 \text{ がいえるので } f_3(x) > 3 \text{ である。}$$

以上より, 最小値は $x = 2$ のときで 2 である。

$$(\text{答}) \ x = 2 \text{ のとき } f_3(x) = 2$$

(3)

一般に, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k|$ であることを数学的帰納法により示す。

$n = 1$ のときは $f_1(x) = |x - a_1|$ より成り立つ。

$n = m$ で成り立つと仮定すると, $f_m(x) = \sum_{k=1}^m |x - a_k|$ なので

$$\begin{aligned} f_{m+1}(x) &= \sum_{k=1}^m |x - a_k| + |x - a_{m+1}| \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} |x - a_k| \end{aligned}$$

より成り立つ。従って $f_n(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k|$ である。

以下, n の偶奇で場合分けして考える。

[1] n が奇数の場合

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^n |x - a_k| \\ &= (|x - a_n| + |x - a_1|) + (|x - a_{n-1}| + |x - a_2|) + \dots + \left| x - a_{\frac{n+1}{2}} \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (|x - a_{n+1-k}| + |x - a_k|) + \left| x - a_{\frac{n+1}{2}} \right| \end{aligned}$$

となる。 $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ のとき, ①を踏まえると,

$$|x - a_{n+1-k}| + |x - a_k| \geq a_{n+1-k} - a_k \quad (\because a_{n+1-k} > a_k)$$

であり, 等号成立は $a_k \leq x \leq a_{n+1-k}$ のときである。したがって, $x = a_{\frac{n+1}{2}}$ のとき, 任意の

$1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ で等号が成り立ち, かつ $\left| x - a_{\frac{n+1}{2}} \right|$ も最小値 0 をとる。よって $f_n(x)$ は

$$x = a_{\frac{n+1}{2}} \text{ のときに最小値 } \sum_{k=\frac{n+3}{2}}^n a_k - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_k \text{ をとる。}$$

[2] n が偶数の場合

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^n |x - a_k| \\ &= (|x - a_n| + |x - a_1|) + (|x - a_{n-1}| + |x - a_2|) + \dots + \left(\left| x - a_{\frac{n}{2}+1} \right| + \left| x - a_{\frac{n}{2}} \right| \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (|x - a_{n+1-k}| + |x - a_k|) \end{aligned}$$

となる。 $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ のとき, ①より,

$$|x - a_{n+1-k}| + |x - a_k| \geq a_{n+1-k} - a_k \quad (\because a_{n+1-k} > a_k)$$

であり, 等号成立は $a_k \leq x \leq a_{n+1-k}$ のときである。したがって $a_{\frac{n}{2}} \leq x \leq a_{\frac{n}{2}+1}$ のとき, 任

意の $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ で等号が成り立つ。よって $f_n(x)$ は $a_{\frac{n}{2}} \leq x \leq a_{\frac{n}{2}+1}$ のときに最小値

$$\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n a_k - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_k \text{ をとる。}$$

以上, [1], [2] より,

$$n \text{ が奇数のときは } x = a_{\frac{n+1}{2}} \text{ で最小値 } \sum_{k=\frac{n+3}{2}}^n a_k - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_k,$$

$$n \text{ が偶数のときは } a_{\frac{n}{2}} \leq x \leq a_{\frac{n}{2}+1} \text{ で最小値 } \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n a_k - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_k$$

をとる。

$$(\text{答}) \ x = a_{\frac{n+1}{2}} \text{ のとき } \sum_{k=\frac{n+3}{2}}^n a_k - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_k \ (n \text{ が奇数のとき}),$$

$$a_{\frac{n}{2}} \leq x \leq a_{\frac{n}{2}+1} \text{ のとき } \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n a_k - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_k \ (n \text{ が偶数のとき})$$

(1)

$f(x)$ の 4 次の係数と $g(x)$ の 3 次の係数がともに 1 であるため、 $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商の 1 次の係数は 1 である。したがって余りが $x^2 + 1$ であることから、実数 t を用いて以下のような式で表せる。

$$f(x) = (x-t)g(x) + x^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

仮に x が $g(x) = 0$ を満たす実数であったとすると、 $\textcircled{1}$ は

$$f(x) = x^2 + 1$$

と表され、 x が実数であることから $x^2 + 1 \geq 1$ であるため、 $f(x) = 0$ とならない。

よって $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ は実数の範囲に共通の解をもたない。

(証明終)

(2)

$f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ の共通の解を α とし、 $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$0 = \alpha^2 + 1$$

より $\alpha = \pm i$ となる。 $f(x)$ と $g(x)$ はともに実数を係数にもつので、 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が i もしくは $-i$ を解にもつとき、その共役複素数も解にもつ。よって $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ は i と $-i$ いずれも解にもつ。

従って、

$$\begin{aligned} f(i) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - ai - b + ci - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -b + (c - a)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = a \end{cases} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} g(i) &= 0 \\ \Leftrightarrow -i - p + qi + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 - p + (q - 1)i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

がいえる。したがって $\textcircled{1}$ の 2 次の係数を比較すると、 $b = 0$ より左辺は 0 であり、右辺は

$$(x-t)(x^3 + 2x^2 + x + 2) + x^2 + 1 = x^4 + (2-t)x^3 + (2-2t)x^2 + (2-t)x + 1 - 2t$$

より $2 - 2t$ なので、

$$2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

となる。ここで $\textcircled{1}$ の 3 次の係数を比較すると、左辺は a で右辺は $2 - 1 = 1$ なので $a = c = 1$ となる。

以上より、

$$f(x) = x^4 + x^3 + x - 1, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

と決まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^4 + x^3 + x - 1, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

3

(1)

G_1 は三角形 $A_2A_3A_4$ の重心なので、 $\overrightarrow{PG_1} = \frac{\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{3}$ と表せる。したがって

$\overrightarrow{A_1G_1} = \frac{\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{3} - \overrightarrow{a_1}$ と表せるので、直線 A_1G_1 上の点の位置ベクトルは定数 t_1 を用いて

$\overrightarrow{a_1} + t_1 \left(\frac{\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{3} - \overrightarrow{a_1} \right)$ と表せる。これに $t_1 = \frac{3}{4}$ を代入すると、

$$\overrightarrow{a_1} + \frac{3}{4} \left(\frac{\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{3} - \overrightarrow{a_1} \right) = \frac{\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{4}$$

となるため、点 H を通る。同様に、直線 A_2G_2 上、直線 A_3G_3 上、直線 A_4G_4 上の点の位置ベクトルは定数 t_2, t_3, t_4 を用いてそれぞれ

$$\overrightarrow{a_2} + t_2 \left(\frac{\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{3} - \overrightarrow{a_2} \right)$$

$$\overrightarrow{a_3} + t_3 \left(\frac{\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_4}}{3} - \overrightarrow{a_3} \right)$$

$$\overrightarrow{a_4} + t_4 \left(\frac{\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}}{3} - \overrightarrow{a_4} \right)$$

と表せ、いずれも t_2, t_3, t_4 に $\frac{3}{4}$ を代入することで $\frac{\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{4}$ となる。よって 4 つの直

線 $A_iG_i (i=1, 2, 3, 4)$ は点 H で交わる。

(証明終)

(2)

$\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{PA_i}$ なので、 $P=H$ のとき直線 A_iH の方向ベクトルは $\overrightarrow{a_i}$ に平行である。したがって、 A_1H と T_1 を含む平面が直交することから、

$$\overrightarrow{A_1H} \perp \overrightarrow{A_2A_3} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \cdot (\overrightarrow{a_3} - \overrightarrow{a_2}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{A_1H} \perp \overrightarrow{A_2A_4} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \cdot (\overrightarrow{a_4} - \overrightarrow{a_2}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_4} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。同様に、 A_2H と T_2 を含む平面が直交することから、

$$\overrightarrow{A_2H} \perp \overrightarrow{A_1A_3} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_2} \cdot (\overrightarrow{a_3} - \overrightarrow{a_1}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\overrightarrow{A_2H} \perp \overrightarrow{A_1A_4} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_2} \cdot (\overrightarrow{a_4} - \overrightarrow{a_1}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_4} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} \quad \dots \textcircled{4}$$

となり、 A_3H と T_3 を含む平面が直交することから、

$$\overrightarrow{A_3H} \perp \overrightarrow{A_1A_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_3} \cdot (\overrightarrow{a_4} - \overrightarrow{a_1}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{a_4} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_3} \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。①と⑤より

$$\overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{a_4} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。よって①, ②, ③, ④, ⑥より

$$\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_4} = \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_4} = \overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{a_4}$$

となるので、 $\overrightarrow{a_j} \cdot \overrightarrow{a_k} (j, k=1, 2, 3, 4)$ は $j \neq k$ を満たすどの j, k に対しても同じである。

(証明終)

(3)

$P=H$ としたとき、

$$\overrightarrow{PH} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{4} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} = -(\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4})$$

なので、これを①に代入すると、(2)より $\overrightarrow{a_4} \cdot \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_4} \cdot \overrightarrow{a_3}$ であることから、

$$-(\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}) \cdot (\overrightarrow{a_3} - \overrightarrow{a_2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_2}|^2 - |\overrightarrow{a_3}|^2 + \overrightarrow{a_4} \cdot \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_4} \cdot \overrightarrow{a_3} = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_2}|^2 - |\overrightarrow{a_3}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_2}|^2 = |\overrightarrow{a_3}|^2$$

となる。

同様に、②に代入すると、

$$-(\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}) \cdot (\overrightarrow{a_4} - \overrightarrow{a_2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_2}|^2 - |\overrightarrow{a_4}|^2 + \overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{a_4} = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_2}|^2 - |\overrightarrow{a_4}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_2}|^2 = |\overrightarrow{a_4}|^2$$

となる。

また、

$$\frac{\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{4} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a_2} = -(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4})$$

を③に代入すると、

$$-(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}) \cdot (\overrightarrow{a_3} - \overrightarrow{a_1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_1}|^2 - |\overrightarrow{a_3}|^2 + \overrightarrow{a_4} \cdot \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_4} \cdot \overrightarrow{a_3} = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_1}|^2 - |\overrightarrow{a_3}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{a_1}|^2 = |\overrightarrow{a_3}|^2$$

となる。

以上より、

$$|\overrightarrow{a_1}|^2 = |\overrightarrow{a_2}|^2 = |\overrightarrow{a_3}|^2 = |\overrightarrow{a_4}|^2 \quad \dots \textcircled{7}$$

が成り立つ。

ここで、四面体の各辺の長さは $|\overrightarrow{a_j} - \overrightarrow{a_k}| (j, k=1, 2, 3, 4)$ で $j \neq k$ を満たすものなので、これら

がいかなる j, k でも同じ値となればいい。(2)の結果および⑦より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a_j} - \overrightarrow{a_k}|^2 &= |\overrightarrow{a_j}|^2 - 2\overrightarrow{a_j} \cdot \overrightarrow{a_k} + |\overrightarrow{a_k}|^2 \\ &= 2|\overrightarrow{a_1}|^2 - 2\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} \end{aligned}$$

となり、 j, k の値によらず同じ値となるので、四面体 $A_1A_2A_3A_4$ は正四面体である。

(証明終)

4

(1)

$$f(x) = e^{-ax} \sin ax \text{ とおく, このとき,}$$

$$f'(x) = -ae^{-ax} \sin ax + ae^{-ax} \cos ax$$

$$= ae^{-ax} (\cos ax - \sin ax)$$

$$= \sqrt{2} ae^{-ax} \sin \left(ax + \frac{3}{4} \pi \right)$$

となり, $ae^{-ax} > 0$ より

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + \frac{3}{4} \pi = m\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{a} \left(m - \frac{3}{4} \right)$$

となる(m は1以上の整数)。したがって増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{4a}$	...	$\frac{5\pi}{4a}$	...	$\frac{9\pi}{4a}$	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

この増減表より, $f(x)$ は, 0 以上の整数 m に対し $x = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi \right)$ のとき極大,

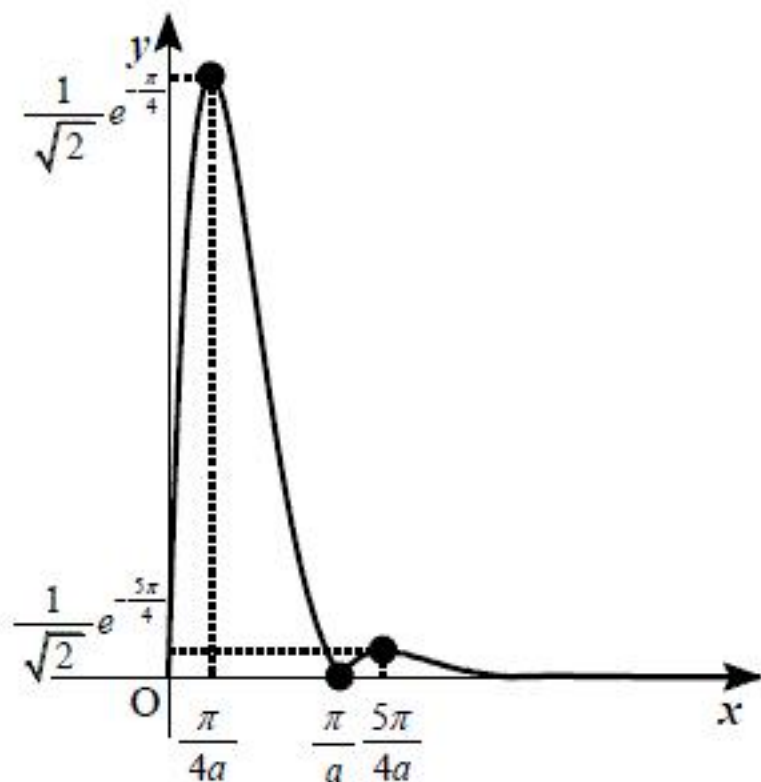
$x = \frac{1}{a} \left(\frac{5\pi}{4} + 2m\pi \right)$ のとき極小となる。

また,

$$x = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi \right) \text{ のとき } \sin ax = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \text{ より } f(x) > 0,$$

$$x = \frac{1}{a} \left(\frac{5\pi}{4} + 2m\pi \right) \text{ のとき } \sin ax = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \text{ より } f(x) < 0$$

なので, $y = |f(x)|$ は $x = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi \right)$ と $x = \frac{1}{a} \left(\frac{5\pi}{4} + 2m\pi \right)$ のときいずれも極大となって,
 グラフの概形は以下のようになる。



したがって, 極大となる x の値は, 先に求めた, $f'(x) = 0$ となる x の値に同じであるから,
 P_n の x 座標は,

$$x = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{3}{4} \right)$$

となり, そのときの, y の値は,

$$y = |f(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x \left(n - \frac{3}{4} \right)}$$

となる。

よって $P_n \left(\frac{\pi}{a} \left(n - \frac{3}{4} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x \left(n - \frac{3}{4} \right)} \right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad P_n \left(\frac{\pi}{a} \left(n - \frac{3}{4} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x \left(n - \frac{3}{4} \right)} \right)$$

(2)

$Q_n = \left(\frac{\pi}{a} \left(n - \frac{3}{4} \right), 0 \right)$ なので, 三角形 OQ_nP_n は

$$\angle OQ_nP_n = 90^\circ, OQ_n = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{3}{4} \right), Q_nP_n = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x \left(n - \frac{3}{4} \right)} \text{ の直角三角形}$$

である。よって

$$S_n = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x \left(n - \frac{3}{4} \right)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}a} \left(n - \frac{3}{4} \right) e^{-x \left(n - \frac{3}{4} \right)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a} \left(n - \frac{3}{4} \right) e^{-x \left(n - \frac{3}{4} \right)}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n - \frac{3}{4} \right) e^{-x \left(n - \frac{3}{4} \right)}}{\left(n + 1 - \frac{3}{4} \right) e^{-x \left(n + 1 - \frac{3}{4} \right)}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^x \cdot \frac{\left(1 - \frac{3}{4n} \right)}{\left(1 + \frac{1}{4n} \right)}$$

$$= e^x$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad e^x$$