

1

(1)

$f(0)=p, f(d)=q, f(2d)=r$ であるから, $f(x)=ax^2+bx+c$ に $x=0, d, 2d$ をそれぞれ代入することで

$$\begin{cases} p=c \\ q=ad^2+bd+c \\ r=4ad^2+2bd+c \end{cases}$$

を得る。よって, $d>0$ のもとで上の連立方程式を解いて

$$\begin{aligned} a &= \frac{p-2q+r}{2d^2} \\ b &= \frac{-3p+4q-r}{2d} \\ c &= p \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a = \frac{p-2q+r}{2d^2}, b = \frac{-3p+4q-r}{2d}, c = p$$

(2)

S_1 は a, b, c, d を用いて

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{2d} f(x) dx \\ &= \int_0^{2d} (ax^2+bx+c) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \right]_0^{2d} \\ &= \frac{8}{3}ad^3 + 2bd^2 + 2cd \end{aligned}$$

と表せる。したがって, 上式に $a = \frac{p-2q+r}{2d^2}, b = \frac{-3p+4q-r}{2d}, c = p$ を代入することで,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{8}{3} \cdot \frac{p-2q+r}{2d^2} \cdot d^3 + 2 \cdot \frac{-3p+4q-r}{2d} \cdot d^2 + 2 \cdot p \cdot d \\ &= \frac{4}{3}(p-2q+r)d + (-3p+4q-r)d + 2pd \\ &= \left(\frac{1}{3}p + \frac{4}{3}q + \frac{1}{3}r \right) d \\ &= \frac{(p+4q+r)d}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad S_1 = \frac{(p+4q+r)d}{3}$$

(3)

$p=1, q=0, r=3, d=1$ のとき $a=2, b=-3, c=1$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 3x + 1 \\ &= (2x-1)(x-1) \end{aligned}$$

である。よって, $|f(x)|$ は $x < \frac{1}{2}, 1 < x$ のとき $|f(x)| = f(x)$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ のとき $|f(x)| = -f(x)$

となるから

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \int_0^2 |f(x)| dx - \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 \{|f(x)| - f(x)\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 -2f(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 -2(2x-1)(x-1) dx \\ &= -4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x-1) dx \\ &= 4 \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^3}{6} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad S_2 - S_1 = \frac{1}{12}$$

(1)

$x^2 - ax + b = 0$ の 2 つの解が正の整数であるとき、それらの解を m, n ($m \leq n$) とすると、解と係数の関係より

$$a = m + n, b = mn \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。したがって、 $a \geq b$ より

$$m + n \geq mn$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq mn - m - n + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq (m-1)(n-1) \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たさねばならない。また、 m, n は正の整数であり、 $m \leq n$ であることに注意すれば、

$$m \leq 2$$

が必要条件であることがわかる。以下、 m の値で場合分けをして考える。

[1] $m = 1$ のとき

②は常に成立するから、 $m \leq n$ も考慮して n は任意の正の整数で必要条件を満たす。また、逆にこのとき①より $a = 1 + n, b = n$ となるから、2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ は

$$x^2 - ax + b = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (1+n)x + n = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-n) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, n$$

より確かに 2 つの正の整数を解に持つ。したがって、 a, b が満たすべき条件は

$$(a, b) = (1+n, n) \quad (n \text{ は任意の正の整数})$$

$$\Leftrightarrow a = b + 1 \quad (b \text{ は任意の正の整数})$$

である。

[2] $m = 2$ のとき

②を満たす n は $m \leq n$ より $n = 2$ であるから、①より $(a, b) = (4, 4)$ である。このとき 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ は

$$x^2 - ax + b = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

より $x = 2$ を重解として持つから、 a, b が満たすべき条件は $(a, b) = (4, 4)$ である。

以上[1], [2]より、 a, b が満たすべき条件は、

$$a = b + 1 \quad (b \text{ は任意の正の整数}) \text{ または } (a, b) = (4, 4)$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = b + 1 \quad (b \text{ は任意の正の整数}) \text{ または } (a, b) = (4, 4)$$

(2)

2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ のすべての解が正であるのは(1)より、条件

$$a = b + 1 \quad (b \text{ は任意の正の整数}) \text{ または } (a, b) = (4, 4)$$

を満たすときである。

[1] 条件 $a = b + 1$ (b は任意の正の整数)を満たすとき

$x^2 - bx + a = 0$ が正の整数のみを解に持つとき、それらを m', n' ($m' \leq n'$) とすると解と係数の関係より

$$b = m' + n', a = m'n'$$

$$\Leftrightarrow b = m' + n', b + 1 = m'n'$$

が成り立つから、上式から b を消去して

$$m' + n' + 1 = m'n'$$

$$\Leftrightarrow m'n' - m' - n' + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow (m'-1)(n'-1) = 2$$

を得る。 m', n' は正の整数かつ $m' \leq n'$ を満たすことより、 $(m', n') = (2, 3)$ であるから

$(a, b) = (6, 5)$ である。逆に、このとき 2 次方程式 $x^2 - bx + a = 0$ は

$$x^2 - bx + a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2, 3$$

より、確かに正の整数のみを解に持つから、 a, b が満たすべき条件は $(a, b) = (6, 5)$ である。

[2] 条件 $(a, b) = (4, 4)$ を満たすとき

2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ と $x^2 - bx + a = 0$ の解はどちらも

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

となるから、確かに正の整数のみを解に持つ。

以上[1], [2]より、 a, b が満たすべき条件は $(a, b) = (4, 4), (6, 5)$ である。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (4, 4), (6, 5)$$

3

(1)

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してケーリー・ハミルトンの定理を用いると

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \dots \textcircled{1}$$

が得られる。一方, $\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ は 2 次方程式 $x^2 - (a+d)x + ad-bc = 0$ の実数解であるから解と係数の関係より

$$\begin{cases} a+d = \alpha + \beta \\ ad-bc = \alpha\beta \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。したがって, ①, ②を用いることで

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E) \cdot \frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E) \\ &= -\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(A-\beta E)(A-\alpha E) \\ &= -\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\{A^2 - (\alpha+\beta)A - \alpha\beta E\} \\ &= -\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\{A^2 - (a+d)A - (ad-bc)E\} \\ &= O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QP &= \frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E) \cdot \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E) \\ &= -\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(A-\alpha E)(A-\beta E) \\ &= PQ \\ &= O \end{aligned}$$

となるから, $PQ = QP = O$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} P+Q &= \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E) + \frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E - A + \alpha E) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)E \\ &= E \end{aligned}$$

より $P+Q = E$ が成り立つ。また, $PQ = QP = O, P+Q = E$ より

$$\begin{aligned} P^2 &= P\{(P+Q)-Q\} \\ &= P(E-Q) \\ &= P-PQ \\ &= P \\ Q^2 &= Q\{(P+Q)-P\} \\ &= Q(E-P) \\ &= Q-QP \\ &= Q \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(A-\beta E) + \frac{\beta}{\beta-\alpha}(A-\alpha E) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha-\beta)A + (-\alpha\beta + \alpha\beta)E\} \\ &= A \end{aligned}$$

より, $A = \alpha P + \beta Q$ が成り立つ。

(証明終)

(4)

n に関する数学的帰納法を用いることで,

$$A^n = \alpha^n P + \beta^n Q \quad \dots \textcircled{3}$$

がすべての自然数 n について成立することを示す。

[1] $n=1$ のとき③が成立することを示す

(3)より $A = \alpha P + \beta Q$ が成り立つから, ③は成立する。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき③の成立を仮定し, $n=k+1$ のとき③が成立することを示す

$$A^k = \alpha^k P + \beta^k Q, A = \alpha P + \beta Q \text{ より}$$

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= (\alpha^k P + \beta^k Q)(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha^{k+1} P^2 + \alpha\beta^k QP + \alpha^k \beta PQ + \beta^{k+1} Q^2 \end{aligned}$$

と表せる。ここで(1), (2)より, $P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = O$ であるから

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \alpha^{k+1} P + O + O + \beta^{k+1} Q \\ &= \alpha^{k+1} P + \beta^{k+1} Q \end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ のとき③が成立することが示された。

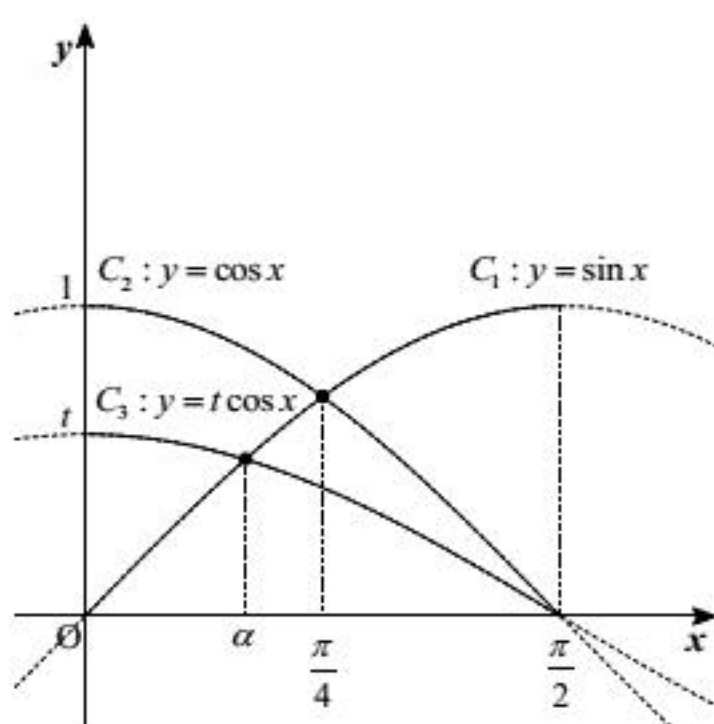
以上[1], [2]より, 数学的帰納法によって任意の自然数 n について $A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

xy 平面上で $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲における $C_1: y = \sin x$, $C_2: y = \cos x$, $C_3: y = t \cos x$ ($0 < t < 1$)

のグラフは次図のようになる。



C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とおくと

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ t \cos \alpha = \sin \alpha \Leftrightarrow t = \tan \alpha \end{cases}$$

を満たすから、関係式 $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ より

$$\begin{aligned} 1 + t^2 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha &= \frac{1}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} (> 0)$$

となる。したがって、 y 軸と C_1 , C_3 で囲まれる部分の面積 S_1 は t を用いて

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\alpha (t \cos x - \sin x) dx \\ &= [t \sin x + \cos x]_0^\alpha \\ &= t \sin \alpha + \cos \alpha - 1 \\ &= (t^2 + 1) \cos \alpha - 1 \\ &= \sqrt{t^2 + 1} - 1 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \sqrt{t^2 + 1} - 1$$

(2)

C_1 , C_2 , C_3 , y 軸で囲まれる部分の面積を S_3 とおくと、

$$S_1 = S_2$$

$$\Leftrightarrow S_1 + S_3 = S_2 + S_3$$

・・・①

である。ここで、

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \\ &= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 1) \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 + S_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - t \cos x) dx \\ &= (1 - t) [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (1 - t)(1 - 0) \\ &= 1 - t \end{aligned}$$

であるから、求める t の値は①より

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 = 1 - t$$

$$\Leftrightarrow t = 2 - \sqrt{2}$$

である。また、このときの S_1 の値は

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{t^2 + 1} - 1 \\ &= \sqrt{7 - 4\sqrt{2}} - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = 2 - \sqrt{2}, S_1 = \sqrt{7 - 4\sqrt{2}} - 1$$