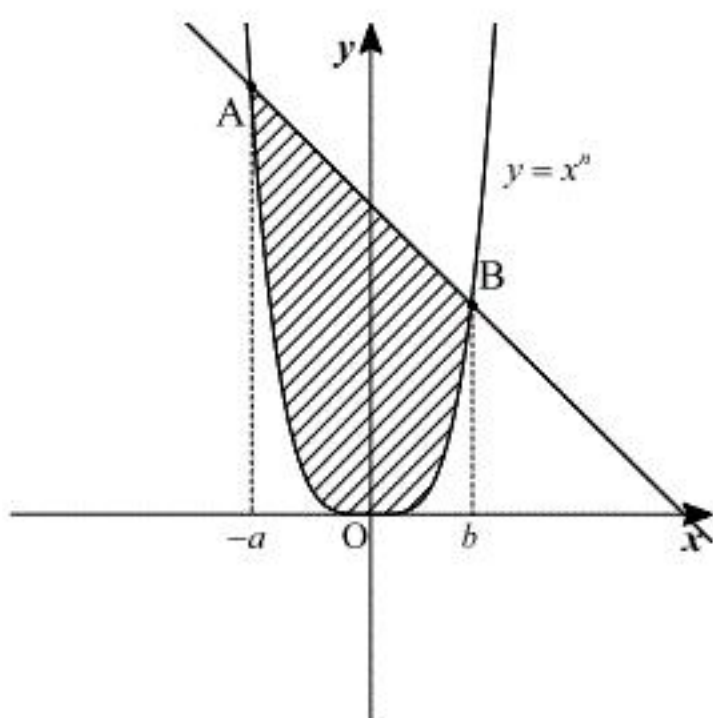


【解答】

$$(1) \frac{1}{2}(ab^n + a^n b)$$

(2)



直線 AB の式は,

$$y - a^n = \frac{b^n - a^n}{b - (-a)}(x + a)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{b^n - a^n}{b + a}(x + a) + a^n$$

$$= \frac{b^n - a^n}{b + a}x + \frac{ab^n + a^n b}{b + a}$$

と表される。よって、求める面積 S_2 は上図の斜線部より,

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-a}^b \left(\frac{b^n - a^n}{b + a}x + \frac{ab^n + a^n b}{b + a} - x^n \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{b^n - a^n}{b + a}x^2 + \frac{ab^n + a^n b}{b + a}x - \frac{1}{n+1}x^{n+1} \right]_{-a}^b \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^n - a^n}{b + a} \cdot (b^2 - a^2) + \frac{ab^n + a^n b}{b + a} \cdot \{b - (-a)\} - \frac{1}{n+1} \{b^{n+1} - (-a^{n+1})\} \\ &= \frac{1}{2}(ab^n + a^n b) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot (a^{n+1} + b^{n+1}) \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}(ab^n + a^n b) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot (a^{n+1} + b^{n+1})$$

(3)

与式より, (左辺) - (右辺) = $S_2 - \frac{2n}{n+1}S_1$ を考えると,

$$\begin{aligned} S_2 - \frac{2n}{n+1}S_1 &= \frac{1}{2}(ab^n + a^n b) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot (a^{n+1} + b^{n+1}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{n+1} \cdot (ab^n + a^n b) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-n}{n+1} \cdot (ab^n + a^n b) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot (a^{n+1} + b^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot (a^{n+1} - ab^n - a^n b + b^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot (b-a)(b^n - a^n) \end{aligned}$$

となる。ここで, $n \geq 2$ より

$$\frac{n-1}{n+1} > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $f(x) = x^n$ と置くと, $f'(x) = nx^{n-1}$ より $x > 0$ で $f'(x) > 0$ なので, $f(x)$ は $x > 0$ において単調増加する。ゆえに, $b-a$ と $b^n - a^n$ の符号は一致するから,

$$(b-a)(b^n - a^n) \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。以上から, ①②を用いて,

$$\begin{aligned} S_2 - \frac{2n}{n+1}S_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot (b-a)(b^n - a^n) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

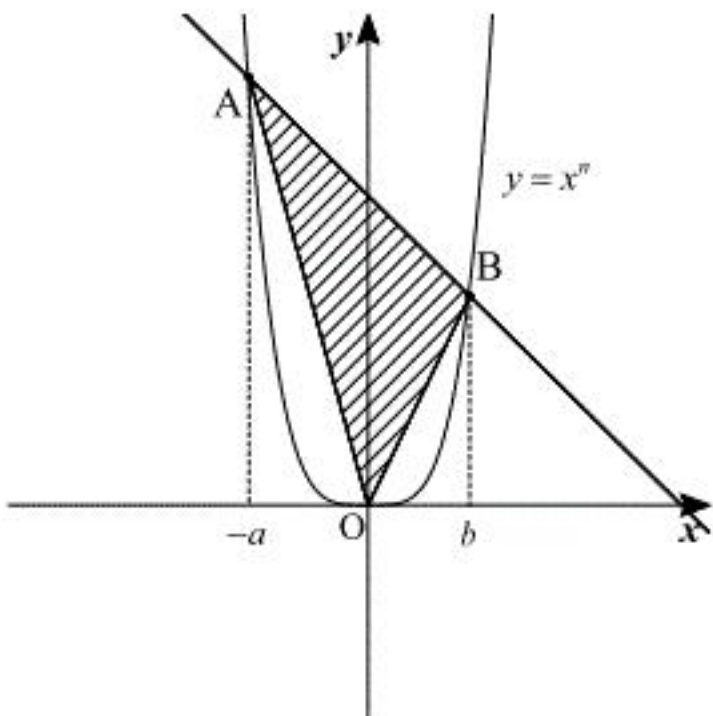
となり, $S_2 \geq \frac{2n}{n+1}S_1$ が示された。

(証明終)

【解説】

(1)

n は 2 以上の偶数より, C のグラフは次図のようになる。



よって、求める面積 S_1 は上図の斜線部であるから,

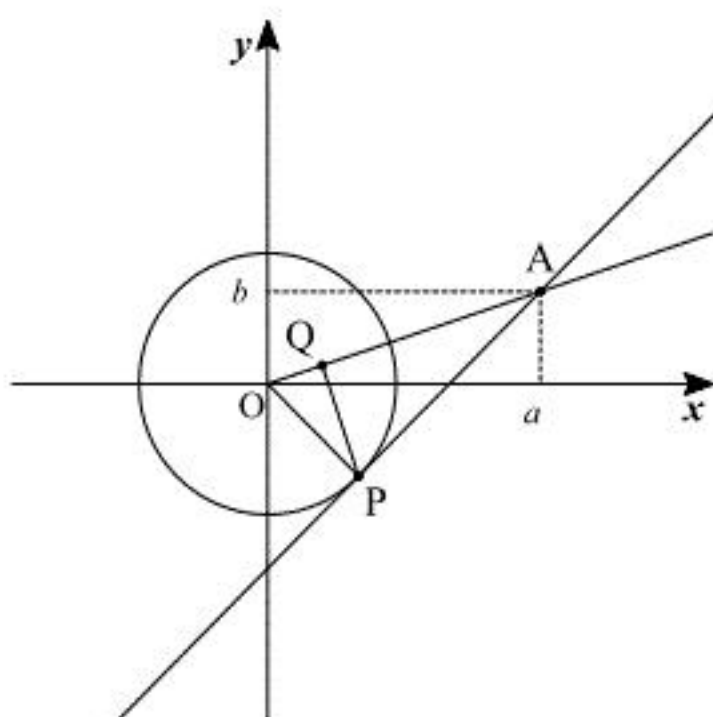
$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} |(-a) \cdot b^n - a^n \cdot b| \\ &= \frac{1}{2} |ab^n + a^n b| \end{aligned}$$

であるが, ここで $a > 0, b > 0$ より $a^n > 0, b^n > 0$ である事を用いると,

$$S_1 = \frac{1}{2}(ab^n + a^n b)$$

と求められる。

(1)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

について、点Qは半直線OA上にあり $OA \cdot OQ = OP^2$ を満たすことから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \\ &= |\overrightarrow{OP}|^2\end{aligned}$$

である。また、直線APは円Cと点Pで接することから $AP \perp OP$ であるため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= |\overrightarrow{OP}|^2 + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= |\overrightarrow{OP}|^2\end{aligned}$$

である。したがって、①より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} &= |\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

となり $OA \perp PQ$ が示された。

(証明終)

(2)

点Qは半直線OA上にあるので、 $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OA}$ (k は実数)と置くと、

$$\begin{aligned}OQ &= kOA \\ &= k\sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

より、 $OA \cdot OQ = OP^2$ に $OP=1$ と共に代入して、

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot k\sqrt{a^2 + b^2} &= 1 \\ \therefore k &= \frac{1}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ より、 $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$ と求められる。

$$\text{(答)} \quad Q\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

(3)

点Qの座標を (X, Y) と置くと、(2)より

$$\begin{cases} X = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ Y = \frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{X}{X^2 + Y^2} \\ b = \frac{Y}{X^2 + Y^2} \end{cases} \quad (\because X^2 + Y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2} > 0)$$

となる。ここで、 $b = \sqrt{2}$ より、

$$\begin{aligned}\frac{Y}{X^2 + Y^2} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}Y &= 0 \text{ かつ } X^2 + Y^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow X^2 + \left(Y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \text{ かつ } X \neq 0 \text{ かつ } Y \neq 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

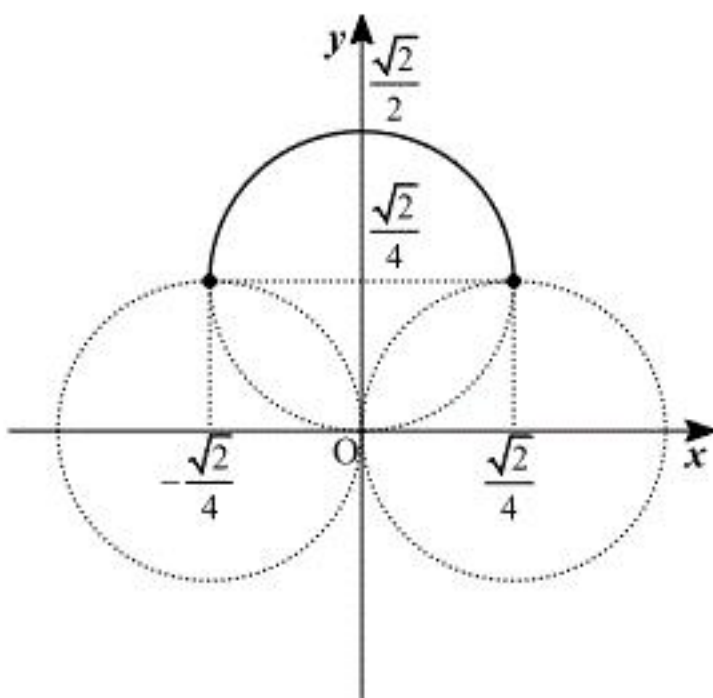
である。また、 $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ より、

$$\begin{aligned}-\sqrt{2} &\leq \frac{X}{X^2 + Y^2} \leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}X \geq 0 \\ X^2 + Y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}X \geq 0 \\ X \neq 0 \text{ かつ } Y \neq 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つが、ここで、

$$\begin{aligned}X^2 + Y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}X &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(X + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + Y^2 &\geq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \quad \dots \textcircled{3} \\ X^2 + Y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}X &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + Y^2 &\geq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

であるから、①、②、③より次図が求める軌跡である。



また、求める軌跡は

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \quad (y \geq \frac{\sqrt{2}}{4})$$

である。

$$\text{(答)} \quad x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \quad (y \geq \frac{\sqrt{2}}{4}), \text{ 前図の実線部}$$

(1)

$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列なので,

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

である。よって、 $n \geq 2$ において,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= (3n-2)(a_n - a_{n-1}) \\ \Leftrightarrow (3n^2 - 2n - 1)a_n &= n(3n-2)a_{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{(3n-2)n}{(3n+1)(n-1)}a_{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $C_n = 3n-2$ とすると

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{C_n}{C_{n+1}} \cdot \frac{n}{n-1} \right) \cdot a_{n-1} \\ &= \left(\frac{C_n}{C_{n+1}} \cdot \frac{n}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{C_{n-1}}{C_n} \cdot \frac{n-1}{n-2} \right) a_{n-2} \\ &= \left(\frac{C_n}{C_{n+1}} \cdot \frac{C_{n-1}}{C_n} \cdots \frac{C_2}{C_3} \right) \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1} \right) a_1 \\ &= \frac{C_2}{C_{n+1}} \cdot na_1 \end{aligned}$$

であるから、 $C_{n+1} = 3n+1$, $C_2 = 4$, $a_1 = 1$ を代入することで,

$$a_n = \frac{4n}{3n+1}$$

と求まる。これは、 a_1 についても成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{4n}{3n+1}$$

(2)

$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列なので,

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n b_k + a_1$$

となるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \frac{4(n+1)}{3(n+1)+1} - 1 \\ &= \frac{n}{3n+4} \\ &= \frac{1}{3+\frac{4}{n}} \end{aligned}$$

である。以上より,

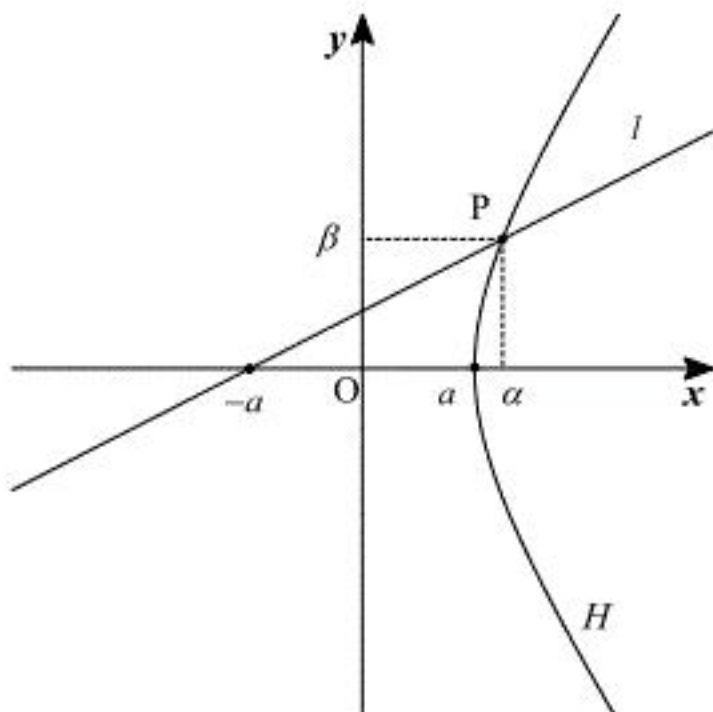
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k &= \frac{1}{3+0} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}$$

(1)

点 $(-a, 0)$ を通る傾き t の直線を l 、 l と H の交点を $P(\alpha, \beta)$ ($\alpha > 0$)とする。



点 P は l 上にあることより、 $\beta = t(\alpha + a)$ となる。また、点 P は H 上にもあるので、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow b^2 \alpha^2 - a^2 \{t(\alpha + a)\}^2 - a^2 b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - t^2 a^2) \alpha^2 - 2t^2 a^3 \alpha - a^2 (b^2 + t^2 a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(b^2 - t^2 a^2) \alpha - a(b^2 + t^2 a^2)\}(\alpha + a) &= 0\end{aligned}$$

が成り立つが、ここで $\alpha > 0$ 、 $a > 0$ より、 $\alpha + a > 0$ なので

$$\alpha = \frac{a(b^2 + t^2 a^2)}{b^2 - t^2 a^2}$$

となる。また、これを l の式に代入して

$$\begin{aligned}\beta &= t \left\{ \frac{a(b^2 + t^2 a^2)}{b^2 - t^2 a^2} + a \right\} \\ &= \frac{2tab^2}{b^2 - t^2 a^2}\end{aligned}$$

となり、以上から H 上の点 (x, y) が求まった。

$$(答) \begin{cases} x = \frac{a(b^2 + t^2 a^2)}{b^2 - t^2 a^2} \\ y = \frac{2tab^2}{b^2 - t^2 a^2} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{x^2 - 1} \quad (x > 1) \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 &= 1 \quad (x > 1, y > 0)\end{aligned}$$

より、求める曲線は H に $a = b = 1$ を代入した曲線の $y > 0$ の部分であるから

$$\begin{aligned}x &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y &= \frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}$$

となり、 $x > 1$ 、 $y > 0$ より

$$0 < t < 1$$

である。

$$(答) \begin{cases} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} \quad (0 < t < 1)$$

(3)

(2)の結果より、 $x > 1$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{1}{y} \\ &= \frac{1-t^2}{2t} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{2t(1-t^2) - (1+t^2) \cdot (-2t)}{(1-t^2)^2} \\ &= \frac{4t}{(1-t^2)^2}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \frac{1-t^2}{2t} \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \log|1+t| - \log|1-t| + C \\ &= \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C\end{aligned}$$

である(ただし、 C は積分定数)。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{1+t}{1-t} &= \frac{(1+t)^2}{(1-t)(1+t)} \\ &= \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{2t}{1-t^2} \\ &= x + y \\ &= x + \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

であるから、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \log|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$$

となる。 $x < -1$ のとき、 $x = -s$ と置換すると $s > 1$ であるから、上の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(-s)^2 - 1}} \frac{dx}{ds} ds \\ &= - \int \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}} ds \\ &= -\log|s + \sqrt{s^2 - 1}| + C \\ &= -\log|-x + \sqrt{x^2 - 1}| + C \\ &= -\log \left| \frac{-x^2 + (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right| + C \\ &= \log|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C\end{aligned}$$

となる。以上より、 $|x| > 1$ の範囲において、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \log|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$$

となる。

$$(答) \log|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$