前

数　　学

(120 分)

注意事項

1. 解答開始の合図があるまで，問題冊子および解答冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は 4 問で，2 ページあります。
3. 問題冊子には，「下書き用紙 1」～「下書き用紙 4」と書いてある下書き用紙がついています。下書き用紙と問題冊子の余白は，計算などに使用することができます。
4. 解答開始後，**解答冊子の表紙所定欄に受験番号，氏名をはっきり記入**しなさい。表紙にはこれら以外のことを書いてはいけません。
5. **解答は，解答冊子の指定されたページに書きなさい。**解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがあります。
6. 解答冊子は，どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後，問題冊子は，下書き用紙も含めて持ち帰りなさい。解答冊子は持ち帰ってはいけません。

下書き用紙１

下書き用紙２

1

曲線 $C : y = x^n$ (n は 2 以上の偶数) 上に点 $\mathrm{A}(-a, a^n)$ $(a > 0)$ と点 $\mathrm{B}(b,\ b^n)$ $(b > 0)$ がある。原点を O とし，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S_1 とする。また，線分 AB と C で囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1) S_1 を求めよ（答えのみでよい）。

(2) S_2 を求めよ。

(3) $S_2 \geqq \dfrac{2n}{n+1} S_1$ が成り立つことを示せ。

2

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。C の外部の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ $(a^2 + b^2 > 1)$ から C に接線を 1 本引き，その接点を P とし，半直線 OA 上に $\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OQ} = \mathrm{OP}^2$ となる点 Q をとる。

(1) $\mathrm{OA} \perp \mathrm{PQ}$ となることを示せ。

(2) Q の座標を a，b を用いて表せ。

(3) A が $b = \sqrt{2}$，$-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ の範囲を動くとき，Q の軌跡を求めて図示せよ。

3

数列 $\{a_n\}$ とその階差数列 $\{b_n\}$ に対して，

$$a_1 = 1, \quad \frac{a_n}{n} = (3n-2)b_{n-1} \quad (n = 2,\ 3, \ldots)$$

が成り立っているとする。

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ。

4

(1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a と b は正の実数) の $x > 0$ の部分を H とする。このとき，点 $(-a,\ 0)$ を通る傾き t の直線と H との交点を考えることにより，H 上の点 $(x,\ y)$ の x と y をそれぞれ t の分数式で表せ。

(2) (1) のやり方を用いて，$y = \sqrt{x^2-1}$ $(x > 1)$ で表される曲線を媒介変数 t の分数式で表示せよ。

(3) (2) の結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ を求めよ。

問題は，このページで終わりである。

下書き用紙３

下書き用紙４