

(1)

条件 $a < b < c$, $a + b + c = 0$ より,

$$3a < a + b + c = 0 \therefore a < 0$$

$$0 = a + b + c < 3c \therefore c > 0$$

を得る。ここで、 $a \neq 0$ であるから、 C が x 軸と異なる 2 点で交わることは、2 次関数

$ax^2 + bx + c$ の判別式 D について、 $D > 0$ であることと同値である。 D の値について、

$$D = b^2 - 4ac > 0 \quad (\because ac < 0)$$

であるから、 C は x 軸と異なる 2 点で交わる。

(証明終)

(2)

C と x 軸との交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、 α, β は 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解であるから、2 次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (\because a \neq 0) \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} L^2 &= (\beta - \alpha)^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \\ &= \frac{b^2 - 4a(-a - b)}{a^2} \\ &= \frac{4a^2 + 4ab + b^2}{a^2} \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad L^2 = \frac{4a^2 + 4ab + b^2}{a^2}$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{4a^2 + 4ab + b^2}{a^2} \\ &= \left(\frac{2a + b}{a}\right)^2 \\ &= \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow L &= \left|2 + \frac{b}{a}\right| \quad (\because L > 0) \end{aligned}$$

であるから、 $\left|2 + \frac{b}{a}\right|$ の値の範囲を考える。 $a < b < c$ かつ $a + b + c = 0$ であるから、 c を消去すると、

$$\begin{aligned} a &< b < -a - b \\ \Leftrightarrow 1 &> \frac{b}{a} > -1 - \frac{b}{a} \quad (\because a < 0) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &< \frac{b}{a} < 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &< 2 + \frac{b}{a} < 3 \\ \therefore \frac{3}{2} &< \left|2 + \frac{b}{a}\right| < 3 \end{aligned}$$

である。したがって、 L の値の範囲は、

$$\frac{3}{2} < L < 3$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{2} < L < 3$$

(1)

以下、 n に関する数学的帰納法を用いて、

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{p} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

このとき、

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^1 = 1 + \frac{1}{p}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は確かに成り立つ。

[2] $n=k$ での成立を仮定するとき

このとき、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{k+1} &= \left(1 + \frac{1}{p}\right)^k \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{k}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad (\because \text{仮定}) \\ &= 1 + \frac{k+1}{p} + \frac{k}{p^2} \\ &> 1 + \frac{k+1}{p} \end{aligned}$$

より、 $\textcircled{1}$ は $n=k+1$ の場合にも成り立つ。

以上[1],[2]より、すべての自然数 n について $\textcircled{1}$ は成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

$1 + \frac{n}{p} > 0$ であるから、(1)で示した不等式の両辺について10を底とする対数をとると、

$$\begin{aligned} n \log_{10} \left(1 + \frac{1}{p}\right) &\geq \log_{10} \left(1 + \frac{n}{p}\right) \\ \therefore \sum_{p=1}^q \log_{10} \left(1 + \frac{n}{p}\right) &\leq \sum_{p=1}^q n \log_{10} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^q n \log_{10} \left(1 + \frac{1}{p}\right) &= n \left\{ \log_{10} \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \right\} \\ &= n \log_{10} \left\{ \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{q}\right) \right\} \\ &= n \log_{10} \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{1+q}{q} \right) \\ &= n \log_{10} (1+q) \end{aligned}$$

であるから、

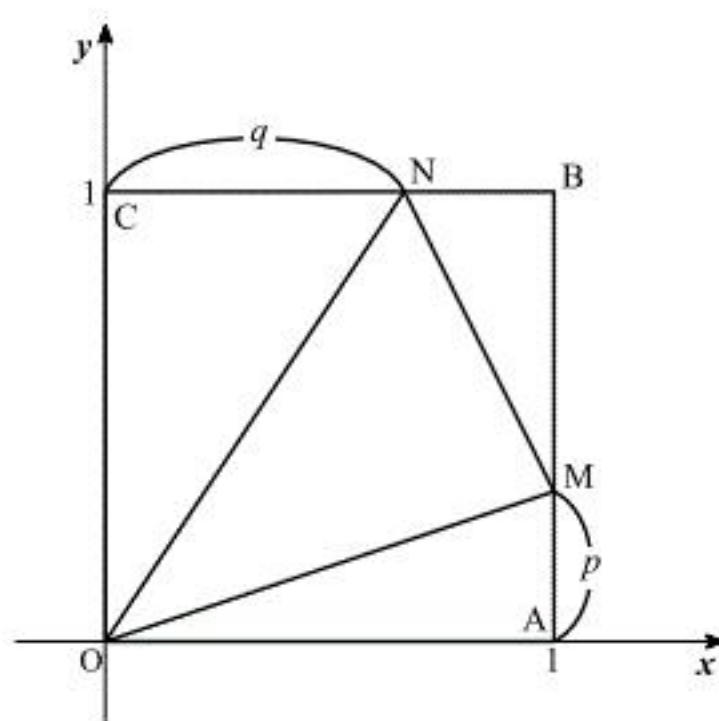
$$\sum_{p=1}^q \log_{10} \left(1 + \frac{n}{p}\right) \leq n \log_{10} (1+q)$$

を得る。

(証明終)

(1)

以下の図のように座標を設定する。



点 M, N の座標はそれぞれ $(1, p)$, $(q, 1)$ であるから, $\triangle OMN$ の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} |1 \cdot 1 - pq| = \frac{1}{2} (1 - pq) \quad (\because 0 < p < 1, 0 < q < 1)$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} (1 - pq)$$

(2)

$p = \frac{1-q}{1+q}$ のとき, (1) より,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-q}{1+q} \cdot q \right) \\ &= \frac{(1+q) - (1-q)q}{2(1+q)} \\ &= \frac{q^2 + 1}{2(1+q)} \\ &= \frac{(1+q)^2 - 2(1+q) + 2}{2(1+q)} \\ &= \frac{1+q}{2} + \frac{1}{1+q} - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで, $1+q > 0$ であるから相加・相乗平均の関係より,

$$\frac{1+q}{2} + \frac{1}{1+q} \geq 2 \sqrt{\frac{1+q}{2} \cdot \frac{1}{1+q}} = \sqrt{2}$$

が成り立ち, 等号成立条件は,

$$\begin{aligned} \frac{1+q}{2} &= \frac{1}{1+q} \\ \Leftrightarrow (1+q)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow q^2 + 2q - 1 &= 0 \\ \therefore q &= \sqrt{2} - 1 \quad (\because 0 < q < 1) \end{aligned}$$

である。従って, S は $q = \sqrt{2} - 1$ のときに最小となり, その最小値は,

$$S = \sqrt{2} - 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } S = \sqrt{2} - 1, \quad q \text{ の値: } q = \sqrt{2} - 1$$

(1)

曲線 C の方程式を x で微分すると,

$$y' = (\log_e x)' \cdot 2 \log_e x = \frac{2 \log_e x}{x}$$

となる。従って、任意の実数 t について、曲線 C の点 (e^t, t^2) における接線の方程式は,

$$y = \frac{2 \log_e e^t}{e^t} (x - e^t) + t^2 = \frac{2t}{e^t} x + t^2 - 2t$$

である。この接線が点 $(0, 3)$ を通るとき,

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{2t}{e^t} \cdot 0 + t^2 - 2t \\ \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 &= 0 \\ \therefore t &= -1, 3 \end{aligned}$$

であるから、条件を満たす接線の方程式は,

$$t = -1 \text{ のとき } y = \frac{2 \cdot (-1)}{e^{-1}} x + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = -2ex + 3$$

$$t = 3 \text{ のとき } y = \frac{2 \cdot 3}{e^3} x + 3^2 - 2 \cdot 3 = \frac{6}{e^3} x + 3$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad y = -2ex + 3, y = \frac{6}{e^3} x + 3$$

(2)

$$y = (\log_e x)^2 \geq 0$$

であり、等号は $x=1$ のときのみ成立する。従って、 C と x 軸、および直線 $x=e$ で囲まれた部分の面積は,

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log_e x)^2 dx &= \left[x (\log_e x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{2 \log_e x}{x} dx \left(\because y' = \frac{2 \log_e x}{x} \right) \\ &= e - 2 \int_1^e (\log_e x) dx \\ &= e - 2 \left[x \log_e x \right]_1^e + 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -e + 2 \left[x \right]_1^e \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad e - 2$$