1

(1)

底の変換より,

$$\frac{\log_{\sqrt{ab}} b}{\log_a \sqrt{ab}} = \left(\log_{\sqrt{ab}} a\right)\left(\log_{\sqrt{ab}} b\right) \qquad \cdots ①$$

であることに注目して考える。$a>1$ かつ $b>1$ より $\sqrt{ab}>1$ となるから, $\log_{\sqrt{ab}} a > \log_{\sqrt{ab}} 1 = 0$

かつ $\log_{\sqrt{ab}} b > \log_{\sqrt{ab}} 1 = 0$ が成立する。したがって相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{\log_{\sqrt{ab}} a + \log_{\sqrt{ab}} b}{2} \geqq \sqrt{\left(\log_{\sqrt{ab}} a\right)\left(\log_{\sqrt{ab}} b\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{\sqrt{ab}}(ab) \geqq \sqrt{\left(\log_{\sqrt{ab}} a\right)\left(\log_{\sqrt{ab}} b\right)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geqq \sqrt{\left(\log_{\sqrt{ab}} a\right)\left(\log_{\sqrt{ab}} b\right)}$$

が成り立つ。両辺はともに正だから, 両辺を 2 乗して,

$$1 \geqq \left(\log_{\sqrt{ab}} a\right)\left(\log_{\sqrt{ab}} b\right) \qquad \cdots ②$$

となる。等号成立条件は $\log_{\sqrt{ab}} a = \log_{\sqrt{ab}} b$ より $a=b$ である。①と②を合わせて

$$\frac{\log_{\sqrt{ab}} b}{\log_a \sqrt{ab}} = \left(\log_{\sqrt{ab}} a\right)\left(\log_{\sqrt{ab}} b\right) \leqq 1$$

となる。$\log_a \sqrt{ab} > \log_a 1 > 0$ に注意して, 両辺に $\log_a \sqrt{ab}$ をかけることで

$$\log_a \sqrt{ab} \geqq \log_{\sqrt{ab}} b$$

が導かれる。

(答) $\log_a \sqrt{ab} \geqq \log_{\sqrt{ab}} b$ (等号成立は $a=b$ のとき)

(2)

$a>0,\ b>0$ より, 相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \qquad \cdots ③$$

が成り立つ。等号成立条件は $a=b$ である。③の両辺の $a(>1)$ を底とした対数をとると

$$\log_a \frac{a+b}{2} \geqq \log_a \sqrt{ab} \qquad \cdots ④$$

となる。同様にして, ③の両辺の $b(>1)$ を底とした対数をとると

$$\log_b \frac{a+b}{2} \geqq \log_b \sqrt{ab} \ (> \log_b 1 = 0)$$

であるから, 底の変換より

$$\frac{1}{\log_b \sqrt{ab}} \geqq \frac{1}{\log_b \frac{a+b}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{ab}} b \geqq \log_{\frac{a+b}{2}} b \qquad \cdots ⑤$$

となる。したがって, (1)の結果および④と⑤から

$$\log_a \frac{a+b}{2} \geqq \log_a \sqrt{ab} \geqq \log_{\sqrt{ab}} b \geqq \log_{\frac{a+b}{2}} b$$

である。いずれの不等号についても等号成立条件は $a=b$ である。よって,

$$\log_a \frac{a+b}{2} \geqq \log_{\frac{a+b}{2}} b$$

が成り立つ。

(答) $\log_a \dfrac{a+b}{2} \geqq \log_{\frac{a+b}{2}} b$ (等号成立は $a=b$ のとき)

$\boxed{2}$

(1)

三角関数の合成より，

$$x=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる。$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$ であるから，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$$

$$\therefore -1\leqq x\leqq\sqrt{2}$$

と求まる。

(答) $-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$

(2)

$$x^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2$$
$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1-\sin2\theta$$

より，

$$\sin2\theta=1-x^2$$

が成り立つ。よって，

$$y=\sin2\theta+a(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$=(1-x^2)+ax$$
$$=-x^2+ax+1$$

と表せる。

(答) $y=-x^2+ax+1$

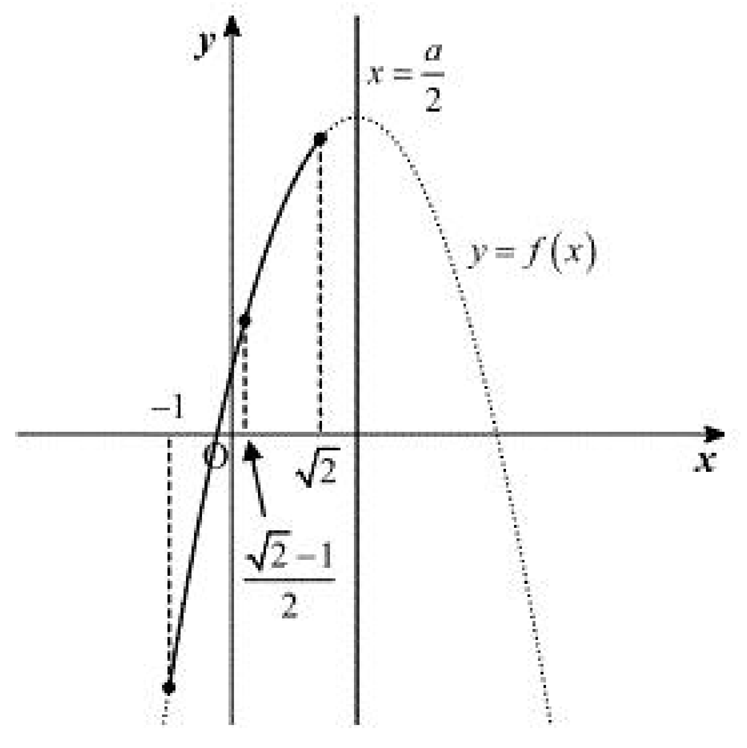
(3)

(1), (2)の結果より，$-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の範囲での $-x^2+ax+1$ の最大値と最小値を求めればよい。

$f(x)=-x^2+ax+1$ とおく。$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+1$ より，$y=f(x)$ のグラフは，軸が $x=\frac{a}{2}$ で上に凸な放物線を表す。また，定義域 $-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の中央の値は $x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ である。以下，$\frac{a}{2}$ と $1, \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \sqrt{2}$ の大小関係で場合分けする。

[1] $\sqrt{2}\leqq\frac{a}{2}$，すなわち $2\sqrt{2}\leqq a$ のとき

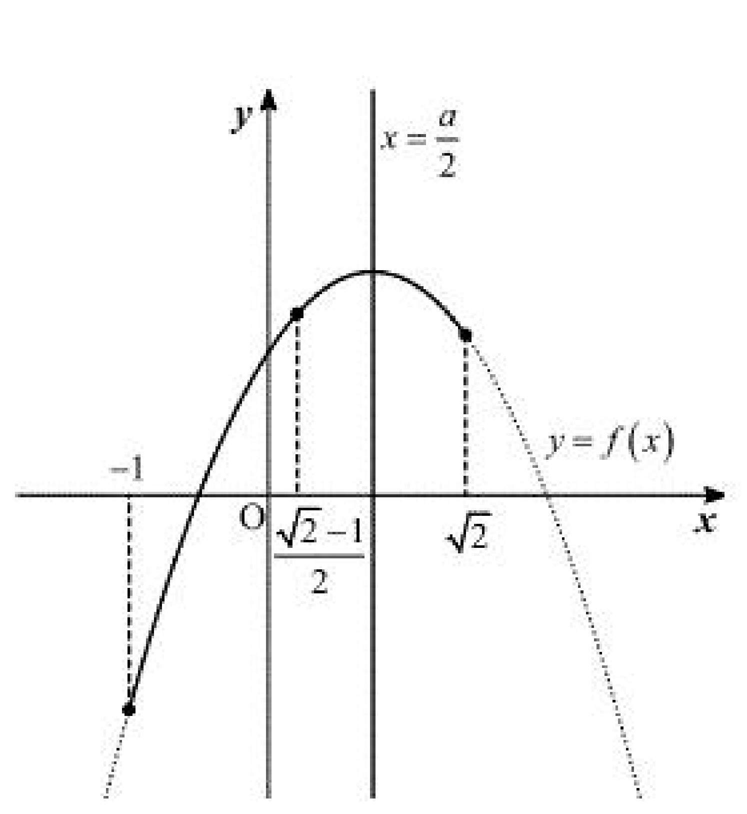
$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



上図より，$x=\sqrt{2}$ で最大値 $f(2\sqrt{2})=\sqrt{2}a-1$，$x=-1$ で最小値 $f(-1)=-a$ をとる。

[2] $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqq\frac{a}{2}<\sqrt{2}$，すなわち $\sqrt{2}-1\leqq a<2\sqrt{2}$ のとき

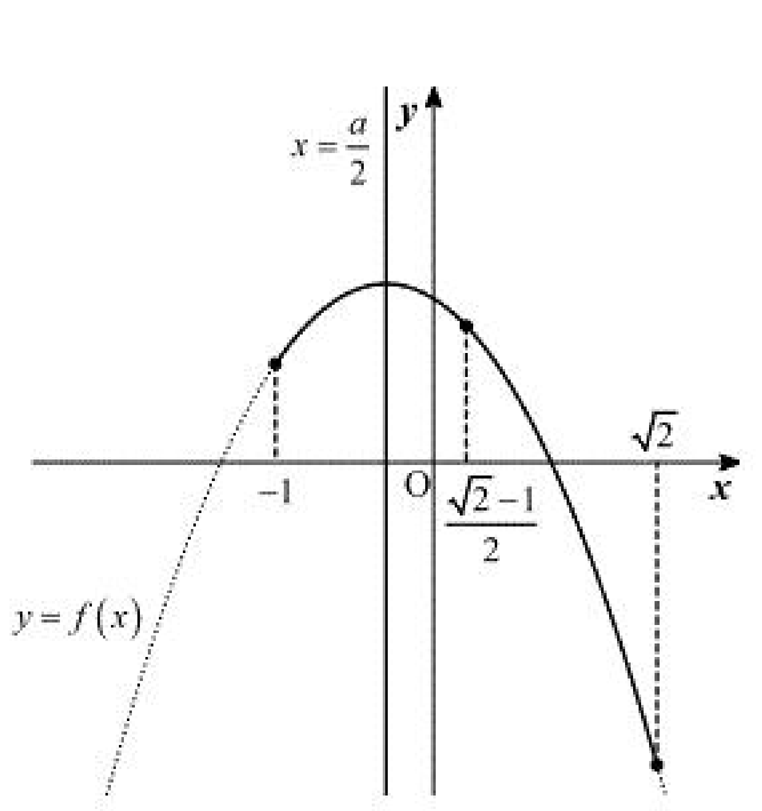
$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



上図より，$x=\frac{a}{2}$ で最大値 $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+1$，$x=-1$ で最小値 $f(-1)=-a$ をとる。

[3] $-1\leqq\frac{a}{2}<\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，すなわち $-2\leqq a<\sqrt{2}-1$ のとき

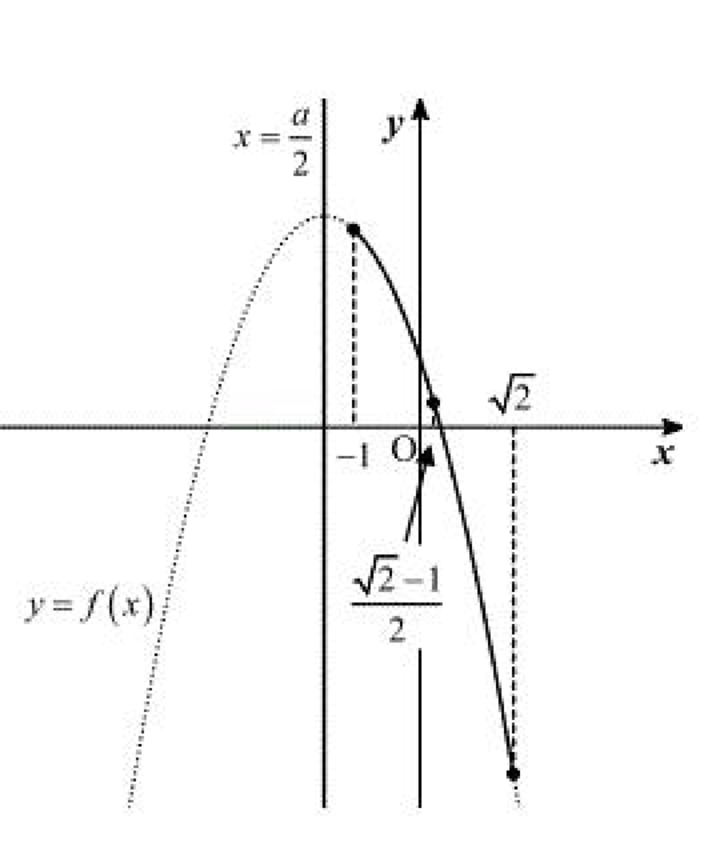
$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



上図より，$x=\frac{a}{2}$ で最大値 $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+1$，$x=\sqrt{2}$ で最小値 $f(2\sqrt{2})=\sqrt{2}a-1$ をとる。

[4] $\frac{a}{2}<-1$，すなわち $a<-2$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



上図より，$x=-1$ で最大値 $f(-1)=-a$，$x=\sqrt{2}$ で最小値 $f(2\sqrt{2})=\sqrt{2}a-1$ をとる。

以上[1], [2], [3], [4]より，M, m の値は

$$M=\begin{cases}\sqrt{2}a-1 & (2\sqrt{2}\leqq a\text{ のとき})\\ \frac{a^2}{4}+1 & (-2\leqq a<2\sqrt{2}\text{ のとき})\\ -a & (a<-2\text{ のとき})\end{cases}$$

$$m=\begin{cases}-a & (a\geqq\sqrt{2}-1\text{ のとき})\\ \sqrt{2}a-1 & (a<\sqrt{2}-1\text{ のとき})\end{cases}$$

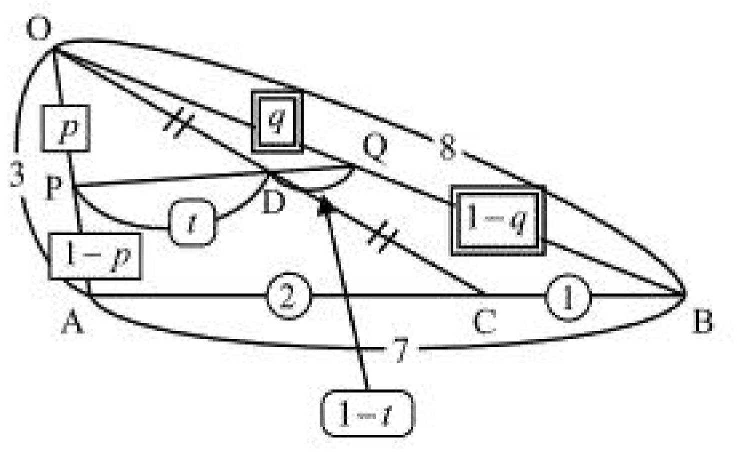
となる。

(答) 前述

$\boxed{3}$

(1)

以下に△OABおよび点C, D, P, Qを図示する。



△OABにおいて，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot3\cdot8}=\frac{1}{2}$$

である。よって，$0°<\angle\mathrm{AOB}<180°$ より $\angle\mathrm{AOB}=60°$ である。したがって，

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin60°\\&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\frac{\sqrt3}{2}\\&=6\sqrt3\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\angle\mathrm{AOB}=60°,\ S_1=6\sqrt3$

(2)

点Cは線分ABを $2:1$ に内分する点だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\vec a+2\vec b}{3}$$

である。点Dは線分OCの中点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{6}\vec a+\frac{1}{3}\vec b \qquad \cdots ①$$

が成り立つ。一方，点Dは線分PQを $t:(1-t)$ に内分するから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=p(1-t)\vec a+qt\vec b \qquad \cdots ②$$

である。$\vec a, \vec b$ は一次独立だから，①，②より

$$\begin{cases}p(1-t)=\dfrac{1}{6}\\ qt=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

が成り立つ。$0<t<1$ より $t\neq0,\ 1-t\neq0$ であるから，$p=\dfrac{1}{6(1-t)},\ q=\dfrac{1}{3t}$ となる。

(答) $p=\dfrac{1}{6(1-t)},\ q=\dfrac{1}{3t}$

(3)

(2)の結果より，

$$\mathrm{OP}=p\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{6(1-t)}\cdot3=\frac{1}{2(1-t)}$$

$$\mathrm{OQ}=q\cdot\mathrm{OB}=\frac{1}{3t}\cdot8=\frac{8}{3t}$$

である。よって，S_2 は

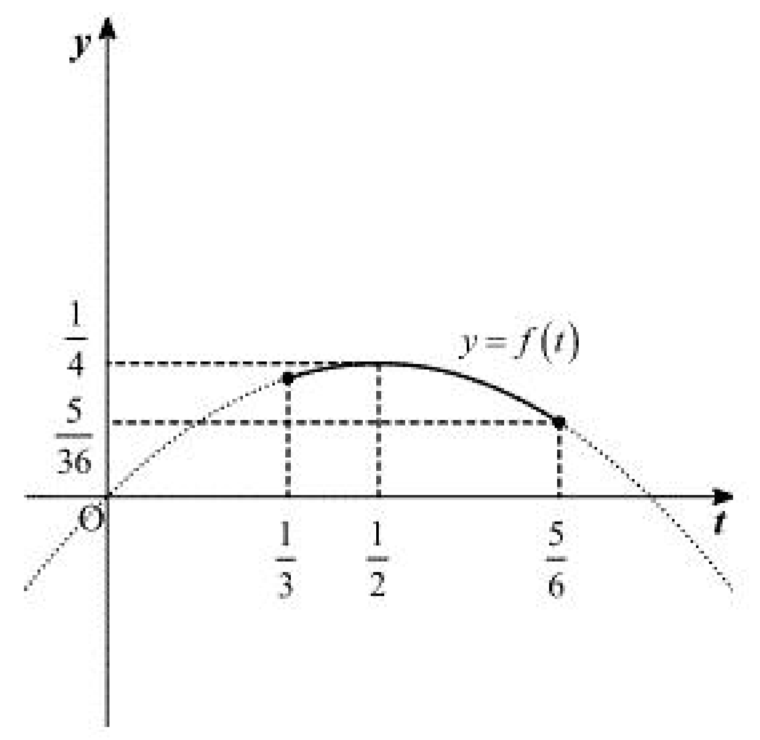
$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\sin60°\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(1-t)}\cdot\frac{8}{3t}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\\&=\frac{\sqrt3}{3t(1-t)}\end{aligned}$$

となる。

(答) $S_2=\dfrac{\sqrt3}{3t(1-t)}$

(4)

$0<t<1$ であることに注意すると，$0<p\leqq1$ より $\dfrac{1}{6(1-t)}\leqq1$ だから，$t\leqq\dfrac{5}{6}$ となる。また，$0<q\leqq1$ より $\dfrac{1}{3t}\leqq1$ だから，$t\geqq\dfrac{1}{3}$ となる。したがって，t のとり得る値の範囲は $\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq\dfrac{5}{6}$ である。ここで $f(t)=t(1-t)$ とおくと，$f(t)=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より $\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq\dfrac{5}{6}$ における $f(t)$ のグラフは下図のようになる。



上図より，$f(t)$ のとり得る値の範囲は，

$$\frac{5}{36}\leqq f(t)\leqq\frac{1}{4}$$

である。$S_2=\dfrac{\sqrt3}{3f(t)}$ であるから，S_2 のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt3}{3\cdot\frac{1}{4}}\leqq S_2\leqq\frac{\sqrt3}{3\cdot\frac{5}{36}}$$

$$\therefore\ \frac{4\sqrt3}{3}\leqq S_2\leqq\frac{12\sqrt3}{5}$$

と求まる。

(答) $\dfrac{4\sqrt3}{3}\leqq S_2\leqq\dfrac{12\sqrt3}{5}$

4

(1)

合成関数の微分法より，

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

と求まる。

(答) $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(2)

$$g'(x)=\frac{1}{2}\{1-f(x)\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\{-f'(x)\}=-\frac{f'(x)}{2\sqrt{1-f(x)}}$$

である。$-1<x<1$ の範囲で，$x=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。$\cos\theta>0$ であることに注意すると，

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$$

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

$$\sqrt{1-f(x)}=\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \quad \cdots ①$$

となるから，

$$g'(x)=-\frac{f'(x)}{2\sqrt{1-f(x)}}=\frac{\tan\theta}{2\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

が成り立つ。$x\to-0$ のとき $\theta\to-0$ であり，$\theta<0$ のとき $\sin\dfrac{\theta}{2}<0$ であるから，求める極限は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-0}g'(x)&=\lim_{\theta\to-0}\left(-\frac{\tan\theta}{2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}\right)\\&=\lim_{\theta\to-0}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right)\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3)

①より，$g(x)=\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$ である。また，$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ であり，積分区間は下表のように移る。

x	0	$\to$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{3}$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}g(x)dx&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\cos\theta d\theta\\&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta d\theta\\&=-2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)'d\theta\\&=-2\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=-2\sqrt{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right\}\\&=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$