

(1)

$y = 3x - x^3$ を微分すると、

$$y' = 3 - 3x^2$$

となる。よって、 C 上の点 $(a, 3a - a^3)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = (3 - 3a^2)(x - a) + 3a - a^3$$

$$\Leftrightarrow y = (3 - 3a^2)x + 2a^3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (3 - 3a^2)x + 2a^3$$

(2)

$y = 3x - x^3$ と $y = (3 - 3a^2)x + 2a^3$ より y を消去して、

$$3x - x^3 = (3 - 3a^2)x + 2a^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

$$\therefore x = a, -2a$$

となる。よって、 $a > 0$ より $x < 0$ における C と ℓ の交点の x 座標は $x = -2a$ である。これを

$y = 3x - x^3$ に代入して

$$y = 3(-2a) - (-2a)^3$$

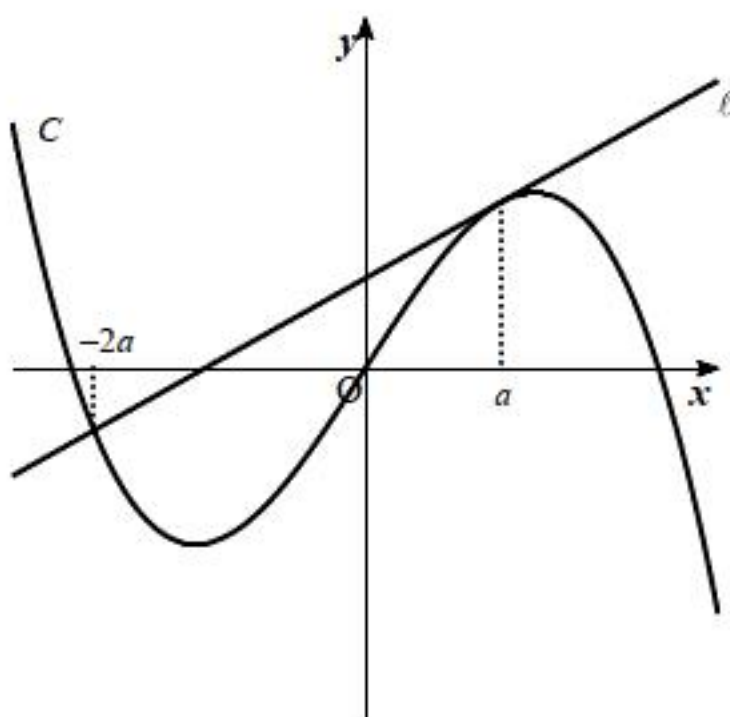
$$= -6a + 8a^3$$

となる。よって、求める交点の座標は $(-2a, -6a + 8a^3)$ である。

$$(\text{答}) \quad (-2a, -6a + 8a^3)$$

(3)

C と ℓ を図示すると以下のようになる。



上図より、 C と ℓ で囲まれた面積を計算すると、

$$\int_{-2a}^a \left[\{(3 - 3a^2)x + 2a^3\} - (3x - x^3) \right] dx$$

$$= \int_{-2a}^a (x - a)^2 (x + 2a) dx$$

$$= \int_{-2a}^a \{(x - a)^3 + 3a(x - a)^2\} dx$$

$$= \left[\frac{(x - a)^4}{4} + a(x - a)^3 \right]_{-2a}^a$$

$$= 0 - \frac{(-3a)^4}{4} - a(-3a)^3$$

$$= \frac{27}{4}a^4$$

となる。よって、これが12となるとき、

$$\frac{27}{4}a^4 = 12$$

$$\Leftrightarrow a^4 = \frac{16}{9}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

(1)

$y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ を微分すると,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} \end{aligned}$$

となる。よって、曲線 $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ の点 A_n における法線は $a_n > -1$ より,

$$y = -\frac{\sqrt{a_n^2 + 2a_n + 4}}{a_n + 1}(x - a_n) + \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 4}$$

である。与えられた条件より、この法線は x 軸上の点 $(a_{n+1}, 0)$ を通るので、代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\sqrt{a_n^2 + 2a_n + 4}}{a_n + 1}(a_{n+1} - a_n) + \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 4} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a_n^2 + 2a_n + 4}}{a_n + 1}(a_{n+1} - a_n) &= \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 4} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= a_n + 1 \\ \therefore a_{n+1} &= 2a_n + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_{n+1} = 2a_n + 1$

(2)

(1)で得られた漸化式は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 2(a_n + 1) \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} a_n + 1 &= 2^n \\ \therefore a_n &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = 2^n - 1$

(3)

$\sum_{k=1}^n a_k$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2^k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $2^{n+1} - n - 2$

3

(1) $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a} \\ \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{OF} = \alpha\vec{b} \\ \overrightarrow{OG} = (1-\beta)\vec{b} + \beta\vec{c} \end{cases}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}$ をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{a} \\ &= -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} \\ &= \alpha\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \alpha\vec{b} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{DF} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \alpha\vec{b}$

(2) 正四面体 OABC は各辺の長さ 1 がであるので,

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

が成立する。 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} &= \left(-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \alpha\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 - \frac{\alpha}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{c} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{9} - \frac{\alpha}{12} - \frac{1}{6} + \frac{\alpha}{4} \\ &= \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{18} \end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{DF}$ が直交するとき、 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ が成り立つから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{18} &= 0 \\ \therefore \alpha &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。このときの $\triangle DEF$ の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{DE}|^2 |\overrightarrow{DF}|^2 - (\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF})^2} \\ &= \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \right| \cdot \left| -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \right| \quad (\because \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{36} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{36} \end{aligned}$$

である。

(答) $\alpha = \frac{1}{3}, S = \frac{\sqrt{21}}{36}$

(3) 点 G が平面 DEF 上にあるとき、 $\overrightarrow{DG}$ は実数 k, l を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DG} &= k\overrightarrow{DE} + l\overrightarrow{DF} \\ &= k\left(-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + l\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= \left(-\frac{k}{6} - \frac{2}{3}l\right)\vec{a} + \frac{l}{3}\vec{b} + \frac{k}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。一方で、 $\overrightarrow{DG}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OD} \\ &= \{(1-\beta)\vec{b} + \beta\vec{c}\} - \frac{2}{3}\vec{a} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + (1-\beta)\vec{b} + \beta\vec{c} \end{aligned}$$

と表すこともできる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立なので、両者の係数を比較して

$$\begin{cases} -\frac{k}{6} - \frac{2}{3}l = -\frac{2}{3} \\ \frac{l}{3} = 1 - \beta \\ \frac{k}{2} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{8}{5} \\ l = \frac{3}{5} \\ \beta = \frac{4}{5} \end{cases}$$

であることが分かる。

(答) $\beta = \frac{4}{5}$

(1)

$f(x) = (1 - \sqrt{3} \sin x) \cos x$ を微分して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{3} \cos x \cdot \cos x + (1 - \sqrt{3} \sin x) \cdot (-\sin x) \\ &= \sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x - \sin x \end{aligned}$$

を得る。また, $f(x) = (1 - \sqrt{3} \sin x) \cos x$ を積分すると,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (1 - \sqrt{3} \sin x) \cos x dx \\ &= \int (1 - \sqrt{3} \sin x) (\sin x)' dx \\ &= \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 x + C \end{aligned}$$

となる。ただし C を積分定数とする。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x - \sin x, \quad \int f(x) dx = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 x + C$$

(2)

$f'(x) = \sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x - \sin x$ をさらに計算すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x - \sin x \\ &= \sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} (1 - \sin^2 x) - \sin x \\ &= 2\sqrt{3} \sin^2 x - \sin x - \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

となる。 $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となるような α を $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲にとる。このとき, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

における $f(x) = (1 - \sqrt{3} \sin x) \cos x$ の増減表は以下の通りとなる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	...	α	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	0

$x = \alpha, \frac{\pi}{3}$ における $f(x)$ の値を計算すると,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (1 - \sqrt{3} \sin \alpha) \cos \alpha \\ &= \left\{ 1 - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

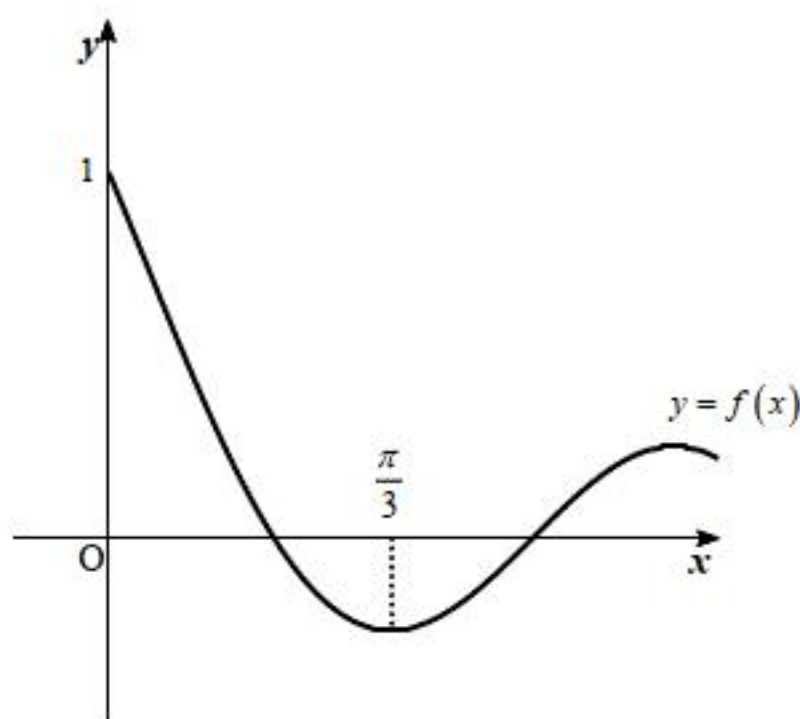
$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。これらの値と増減表より, 最大値は $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, 最小値は $-\frac{1}{4}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad \text{最小値 } -\frac{1}{4}$$

(3)

(2)の増減表より, $x \geq 0$ において $y = f(x)$ を図示すると下図のようになる。



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ の範囲において $f(x) = 0$ となるものを $x = \beta$ とおく。このとき,

$$\begin{aligned} f(\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3} \sin \beta) \cos \beta &= 0 \\ \therefore \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

が成立する。よって, 求める面積 S は上図より,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\beta f(x) dx \\ &= \int_0^\beta (1 - \sqrt{3} \sin x) \cos x dx \\ &= \left[\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 x \right]_0^\beta \\ &= \sin \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{\sqrt{3}}{6}$$