

1

(1)

点 A を通り $\vec{h} = (2, 1, 1)$ に平行な直線の方程式は、パラメータ t を用いて

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (-3, 0, 0) + t(2, 1, 1) \\ &= (-3 + 2t, t, t)\end{aligned}$$

と表すことができる。したがって、点 C を $(-3 + 2t, t, t)$ とおけて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &= (-3 + 2t, t, t) - (0, 0, 1) \\ &= (-3 + 2t, t, t - 1)\end{aligned}$$

と書ける。条件 $\vec{h} \cdot \overrightarrow{BC} = -5$ より

$$\begin{aligned}\vec{h} \cdot \overrightarrow{BC} &= -5 \\ \Leftrightarrow (2, 1, 1) \cdot (-3 + 2t, t, t - 1) &= -5 \\ \Leftrightarrow (-3 + 2t) \cdot 2 + t \cdot 1 + (t - 1) \cdot 1 &= -5 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となるので、点 C の座標は $\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ と求まる。

(答) $\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (3, 0, 1) \\ \overrightarrow{AC} &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

である。ゆえに $\triangle ABC$ の面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(3^2 + 0^2 + 1^2) \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right\} - \left(3 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{6}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\sqrt{11}}{6}$

(3)

点 D は平面 ABC 上にあるから、ある実数 p, q を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= p\overrightarrow{OA} + (1 - p - q)\overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OC} \\ &= p(-3, 0, 0) + (1 - p - q)(0, 0, 1) + q\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(-3p - \frac{7}{3}q, \frac{1}{3}q, 1 - p - \frac{2}{3}q\right) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と書ける。条件より $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OD} \perp \vec{h}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-3p - \frac{7}{3}q, \frac{1}{3}q, 1 - p - \frac{2}{3}q\right) \cdot (3, 0, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-3p - \frac{7}{3}q\right) \cdot 3 + \frac{1}{3}q \cdot 0 + \left(1 - p - \frac{2}{3}q\right) \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 10p - \frac{23}{3}q &= 0 \\ \overrightarrow{OD} \cdot \vec{h} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-3p - \frac{7}{3}q, \frac{1}{3}q, 1 - p - \frac{2}{3}q\right) \cdot (2, 1, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-3p - \frac{7}{3}q\right) \cdot 2 + \frac{1}{3}q \cdot 1 + \left(1 - p - \frac{2}{3}q\right) \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 7p - 5q &= 0\end{aligned}$$

となる。これを整理して

$$\begin{aligned}\begin{cases} 1 - 10p - \frac{23}{3}q = 0 \\ 1 - 7p - 5q = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{8}{11} \\ q = -\frac{9}{11} \end{cases}\end{aligned}$$

を得る。これを式①に代入すれば、点 D の座標は $\left(-\frac{3}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{9}{11}\right)$ と求まる。

(答) $\left(-\frac{3}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{9}{11}\right)$

(1)

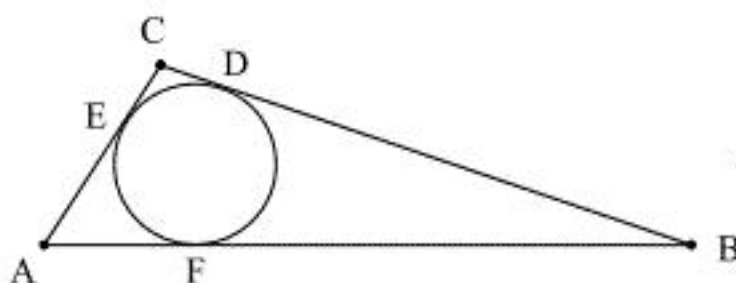
$\triangle ABC$ について余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \theta \\ &= 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos \theta \\ &= 10 - 6 \cos \theta \end{aligned}$$

となり、 $BC > 0$ であるから $BC = \sqrt{10 - 6 \cos \theta}$ を得る。また、下図の様に内接円と辺 CA , AB の接点をそれぞれ E , F とすると、内接円の性質より、 $AE = AF$, $BD = BF$, $CD = CE$ である。したがって、

$$\begin{aligned} CD &= \frac{BC + AC - AB}{2} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - 2}{2} \end{aligned}$$

を得る。



つづけて、 $\triangle ABC$ の面積は、 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \theta$ としても $\frac{1}{2} r (AB + AC + BC)$ としても求めることができるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sin \theta &= \frac{1}{2} r (3 + 1 + \sqrt{10 - 6 \cos \theta}) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3 \sin \theta}{4 + \sqrt{10 - 6 \cos \theta}} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad BC = \sqrt{10 - 6 \cos \theta}, \quad CD = \frac{\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - 2}{2}, \quad r = \frac{3 \sin \theta}{4 + \sqrt{10 - 6 \cos \theta}}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{CD}{r\theta} &= \frac{\frac{\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - 2}{2}}{\frac{3 \sin \theta}{4 + \sqrt{10 - 6 \cos \theta}} \cdot \theta} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 6 \cos \theta} + 1 - 3 \cos \theta}{3 \theta \sin \theta} \\ &= \frac{(\sqrt{10 - 6 \cos \theta} + 1 - 3 \cos \theta)(\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - (1 - 3 \cos \theta))}{3 \theta \sin \theta (\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - (1 - 3 \cos \theta))} \\ &= \frac{9(1 - \cos^2 \theta)}{3 \theta \sin \theta (\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - 1 + 3 \cos \theta)} \\ &= \frac{9 \sin^2 \theta}{3 \theta \sin \theta (\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - 1 + 3 \cos \theta)} \\ &= \frac{3 \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{(\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - 1 + 3 \cos \theta)} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{CD}{r\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{3 \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{(\sqrt{10 - 6 \cos \theta} - 1 + 3 \cos \theta)} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{(\sqrt{10 - 6 \cdot 1} - 1 + 3 \cdot 1)} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

を得る。

3

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{-\{x-(-1+\sqrt{2})\}\{x-(-1-\sqrt{2})\}}{(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

より、増減表は以下の通りになる。

x	-1	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

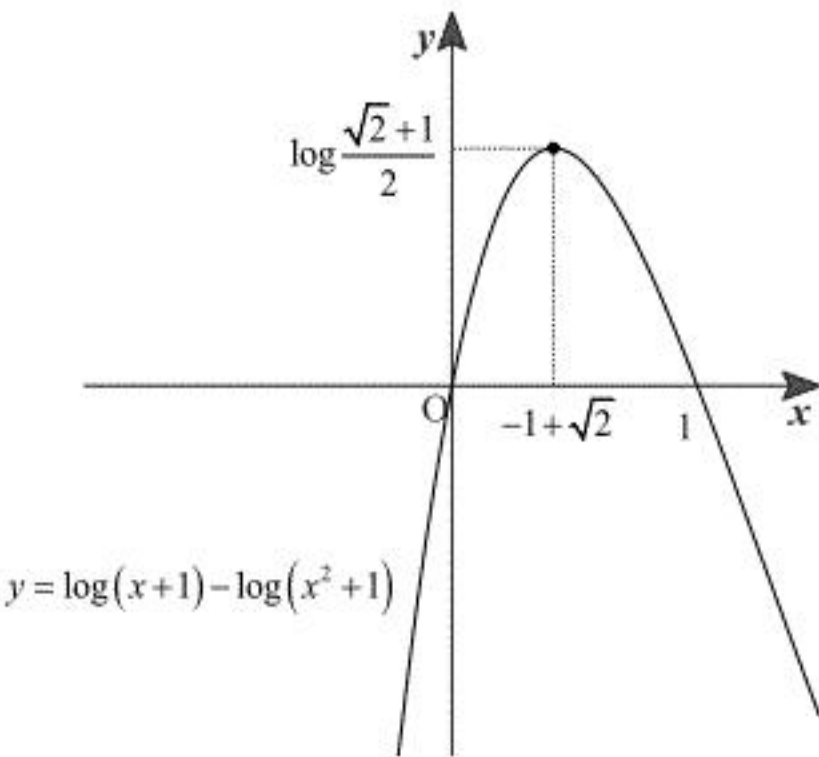
したがって $f(x)$ は、 $x=-1+\sqrt{2}$ で極大値 $f(-1+\sqrt{2})=\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

(答) 極値: $\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, それを与える $x:-1+\sqrt{2}$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log(x+1) &= \log(x^2+1) \\ \Leftrightarrow x+1 &= x^2+1 \\ \Leftrightarrow x(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 1 \end{aligned}$$

である。このことと(1)の増減表から、 $y=f(x)$ のグラフはおおよそ下図のようになる。



上図より、求める面積は

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \log(x+1) dx - \int_0^1 \log(x^2+1) dx$$

となる。第一項について、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(x+1) dx &= \left[(x+1) \log(x+1) - x \right]_0^1 \\ &= 2 \log 2 - 1 \end{aligned}$$

と計算できる。第二項について、部分積分を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(x^2+1) dx &= \int_0^1 (x)' \log(x^2+1) dx \\ &= \left[x \log(x^2+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1} dx \\ &= \log 2 - \left(2 \int_0^1 dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \right) \\ &= \log 2 - 2 \left[x \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \log 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ について、 $x=\tan\theta$ と変数変換すると $dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり、変数の対応関係は以下の通りとなる。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\int_0^1 \log(x^2+1) dx = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

を得る。以上より、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= (2 \log 2 - 1) - \left(\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1 + \log 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $1+\log 2-\frac{\pi}{2}$

(1)

$a^2 - b^2 = 5 > 0$ と $a, b > 0$ より, $a > b$ である。そして,

$$a^2 - b^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 5$$

において, $a-b, a+b$ は自然数であり, $a+b > a-b$ が成立するので, 5 が素数であることに注意すると,

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases}$$

となり, $(a+b, a-b)$ の組が一意に求まる。これを解いて, $a=3, b=2$ が求まる。

(答) $a=3, b=2$

(2)

$a^3 - b^3 = p^2 > 0$ と $a, b > 0$ より, $a > b$ である。また,

$$a^3 - b^3 = p^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = p^2$$

において, $a-b, a^2 + ab + b^2$ は自然数であり

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 < a^2 + ab + b^2$$

であるから,

$$a-b < a^2 + ab + b^2$$

も成り立つ。したがって, p が素数であることより

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a^2 + ab + b^2 = p^2 \end{cases}$$

を得る。ここで, $a^2 + ab + b^2 = p^2$ に $a-b=1 \Leftrightarrow a=b+1$ を代入すると,

$$a^2 + ab + b^2 = p^2$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = p^2$$

$$\Leftrightarrow 3b^2 + 3b + 1 - p^2 = 0$$

となる。ここで, p に小さい素数から順に代入し, この b についての2次方程式の解が自然数になるものを探すと, $p=2, 3, 5, 7, 11$ のときは不適で, $p=13$ のとき,

$$3b^2 + 3b + 1 - 13^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+8)(b-7) = 0$$

となって初めて解が $b=7$ と自然数になる。また, このとき $a=7+1=8$ である。よって,

$a^3 - b^3 = p^2$ を満たす最小の p は13であり, このときの a, b の組は $a=8, b=7$ と求まる。

(答) $p=13, a=8, b=7$