

〔I〕

(1)

$$\begin{aligned}\angle CPQ &= 180^\circ - (\angle BPR + \angle RPQ) \\ &= 120^\circ - \angle BPR \quad (\because \angle RPQ = 60^\circ) \\ &= 120^\circ - (180^\circ - \angle BRP - \angle PBR) \\ &= \angle BRP \quad (\because \angle PBR = 60^\circ)\end{aligned}$$

となり、 $\angle CPQ = \angle BRP$ であることは示された。

(証明終)

(2)

$\triangle BPR$ において正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{BP}{\sin \angle BRP} &= \frac{PR}{\sin 60^\circ} \\ \Leftrightarrow PR \sin \angle BRP &= \frac{\sqrt{3}}{2}x\end{aligned}$$

となる。 $\triangle PQR$ が正三角形であることより $PR = PQ$ であり、また(1)の結果より $\sin \angle BRP = \sin \angle CPQ$ であるから

$$\begin{aligned}CQ &= PQ \sin \angle CPQ \\ &= PR \sin \angle BRP \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}x\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad CQ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

(3)

$$\begin{aligned}CP &= 1 - x \\ CQ &= \frac{\sqrt{3}}{2}x\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}PQ^2 &= CP^2 + CQ^2 \\ &= \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}PQ^2 \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{7}{4}x^2 - 2x + 1 \right) \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{16}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{16} \left(x - \frac{4}{7} \right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{28}\end{aligned}$$

である。点 P は B, C とは異なる辺 BC 上の点であることから $0 < x < 1$ である。この範囲において S は

$$x = \frac{4}{7} \text{ のとき最小値 } \frac{3\sqrt{3}}{28}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{7\sqrt{3}}{16}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 最小値 } \frac{3\sqrt{3}}{28} \left(x = \frac{4}{7} \right)$$

〔Ⅱ〕

(1)

$a > 0$ であることから求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a (x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 + a \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{1}{3}a^3 + a$$

(2)

関数 $y = x^2 + 1$ について、その導関数は

$$y' = 2x$$

である。よって点 P を通り、 P における $C: y = x^2 + 1$ の接線に垂直な直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2 + 1 \\ &= -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。よって、この直線が y 軸と交わる点 B の座標は $\left(0, a^2 + \frac{3}{2}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad B\left(0, a^2 + \frac{3}{2}\right)$$

(3)

台形 $OAPB$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \left\{ (a^2 + 1) + \left(a^2 + \frac{3}{2}\right) \right\} \times a$$

である。また

$$S = S_1 + S_2$$

が成り立つ。よって、 S_1 と S_2 が等しくなるとき

$$\begin{aligned} S &= 2S_1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left\{ (a^2 + 1) + \left(a^2 + \frac{3}{2}\right) \right\} \times a &= 2 \left(\frac{1}{3}a^3 + a \right) \\ \Leftrightarrow a^3 - \frac{9}{4}a &= 0 \\ \Leftrightarrow a \left(a + \frac{3}{2} \right) \left(a - \frac{3}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $a > 0$ であることより、求める a の値は

$$a = \frac{3}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3}{2}$$

〔Ⅲ〕

(1)

点Pは直線OA上の点であるから、実数 a を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= a\overrightarrow{OA} \\ &= (2a, a, 0)\end{aligned}$$

とおける。 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{CP}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2, 1, 0) \cdot (2a-3, a-3, -2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(2a-3) + a-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

である。よって、 $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, 0\right)$ となるから、点P $\left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, 0\right)$ である。また、点Qは直線OB上

の点であるから、実数 b を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= b\overrightarrow{OB} \\ &= (b, 3b, 0)\end{aligned}$$

とおける。 $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CQ}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1, 3, 0) \cdot (b-3, 3b-3, -2) &= 0 \\ \Leftrightarrow b-3+3(3b-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

である。よって、 $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, 0\right)$ となるから、点Q $\left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, 0\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, 0\right), Q\left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, 0\right)$$

(2)

3点O, P, Qは全て xy 平面上の点であるから、四面体OPQCについて $\triangle OPQ$ を底面として考えると高さは点Cの z 座標2に一致する。よって、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \times \triangle OPQ \times 2 \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \left| \frac{18}{5} \times \frac{18}{5} - \frac{6}{5} \times \frac{9}{5} \right| \\ &= \frac{18}{5}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{18}{5}$$

【IV】

(1)

10 で割り切れる整数は一の位が 0 である。ここで、十、百、千の位の数字の組み合わせを考える。

[1] 三つの位の数字が同じ時

三つの位の数字の組み合わせは

$$(2, 2, 2), (3, 3, 3)$$

の 2 通りあり、それぞれの場合において数字の並べ方は 1 通りに決まる。

[2] 二つの位の数字が同じ時

三つの位の数字の組み合わせは

$$(1, 1, 2), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2)$$

の 6 通りあり、それぞれに並べ方が ${}_3C_1 = 3$ 通りあるから、数字の並べ方は全部で

$$6 \times 3 = 18 \text{ 通り}$$

ある。

[3] 三つの位の数字がすべて異なる時

三つの位の数字の組み合わせは

$$(1, 2, 3)$$

の 1 通りあり、その並べ方が $3!$ 通りあるから、数字の並べ方は全部で

$$1 \times 3! = 6 \text{ 通り}$$

ある。

以上、[1], [2], [3] の場合は互いに排反であり、求める 10 で割り切れる整数の個数は、一の位の数字を 0 とするもとでの十、百、千の位の数字の並べ方の総数に等しいから

$$2 + 18 + 6 = 26 \text{ 個}$$

ある。

(答) 26 個

(2)

どの桁の数字も 0 でない整数の作り方は以下の場合がある。

[1] すべての位の数が同じ時

四つの位の数字の組み合わせは

$$(3, 3, 3, 3)$$

の 1 通りあり、このときの数字の並べ方は 1 通りに決まる。

[2] 三つの位の数が同じ時

四つの位の数字の組み合わせは

$$(2, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 3), (3, 3, 3, 1), (3, 3, 3, 2)$$

の 4 通りあり、それぞれの組み合わせに対して並べ方が ${}_4C_1 = 4$ 通りあるから、数字の並べ方は全部で

$$4 \times 4 = 16 \text{ 通り}$$

ある。

[3] 二つの同じ数字の組が二つある時

四つの位の数字の組み合わせは

$$(1, 1, 2, 2), (1, 1, 3, 3), (2, 2, 3, 3)$$

の 3 通りあり、それぞれ並べ方が ${}_4C_2 = 6$ 通りあるから、数字の並べ方は全部で

$$3 \times 6 = 18 \text{ 通り}$$

ある。

[4] 二つの位の数が同じで残りが異なる時

四つの位の数字の組み合わせは

$$(1, 1, 2, 3), (2, 2, 1, 3), (3, 3, 1, 2)$$

の 3 通りあり、それぞれ並べ方が $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ 通りあるから、数字の並べ方は全部で

$$3 \times 12 = 36 \text{ 通り}$$

ある。

以上、[1]～[4] の場合は互いに排反であることより、どの桁の数字も 0 でない整数の個数は、0 を含まない四つの位の数字の並べ方の総数に等しいから

$$1 + 16 + 18 + 36 = 71 \text{ 個}$$

ある。

(答) 71 個

(3)

すべての整数の個数は、(1), (2) で求めた個数と、百の位が 0 の整数の個数、十の位が 0 の整数の個数の合計である。百の位が 0 の整数の個数、十の位が 0 の整数の個数は (1) と同様に考えることができる。よって、すべての整数の個数は

$$26 + 71 + 26 + 26 = 149 \text{ 個}$$

である。

(答) 149 個