

〔I〕

(1)

さいころの目の出方は同様に確からしい。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ a, b の組み合わせは、

$$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 2)$$

であり、 $(1, 1), (2, 2)$ は 1 通りずつである。 $(1, 2), \dots, (1, 6)$ は a, b が入れ替わってもよい、つまり、

$$(a, b) = (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), (3, 1), \dots, (6, 1)$$

であり、 $(1, 2), \dots, (1, 6)$ はそれぞれ 2 通りずつで、 $2 \cdot 5 = 10$ 通りである。よって、 $\textcircled{1}$ を満たす a, b の組は $2 + 10 = 12$ 通りなので、求める確率は、

$$\frac{12}{6^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

[1] $c=1$ のとき

このときは $\textcircled{1}$ を満たす確率を求めればよく、それは(1)より $\frac{1}{3}$ である。

[2] $c=2$ のとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ a, b の組み合わせは、

$$(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 2), \dots, (2, 6), (3, 3), \dots, (3, 6), (4, 4)$$

の 16 通りで、(1)と同様に考えれば、 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ は 1 通りずつである。

それ以外は a, b が入れ替わってもよいので 2 通りずつで、 $2 \cdot 12 = 24$ 通りである。よって、 $\textcircled{2}$ を満たす a, b の組は合計 $4 + 24 = 28$ 通りなので、 $c=2$ のとき、 $\textcircled{2}$ が成り立つ確率は、

$$\frac{28}{6^2} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

である。

[3] $c \geq 3$ のとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \geq \frac{1}{c}$$

であり、これは常に成り立つ。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{9} + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{23}{27}$$

である。

(答) $\frac{23}{27}$

〔Ⅱ〕

(1)

四角形 ABCD の辺 AD, BC について, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$ が成り立つので,

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$$

が成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad (\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -\overrightarrow{AQ} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AQ}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AQ}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad (\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

となり, AB と PQ は平行である。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \left(\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\ &= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

となるので,

$$\overrightarrow{PD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{PQ}$$

であり, 3 点 P, Q, D は一直線上にある。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)

初めて $a_k - a_{k+1} \geq 9$ となるのは,

$$a_k = 10, a_{k+1} = 1$$

のとき。このときの k は $\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, \dots, 10\}$ の数を並べたときの項の総数なので,

$$k = \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

である。また, $a_k - a_{k+1} \geq 9$ となるのは, $k \geq 55$ の範囲で $a_{k+1} = 1$ となるときなので, k が,

$$55, 55+11=66, 66+12=78, 78+13=91, 91+14=105, \dots$$

のときである。よって, 100 以下の自然数 k の最大値は, $k=91$ である。

(答) 最小値 $k=55$, 最大値 $k=91$

(2)

初項から, 数列に含まれる数の集まり $\{1, 2, \dots, 20\}$ までの項の総数は,

$$\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

であるので, 初項から $\{1, 2, \dots, 21\}$ までの項の総数は,

$$210 + 21 = 231$$

である。よって, a_{225} は $\{1, 2, \dots, 21\}$ に含まれ,

$$225 - 210 = 15$$

より,

$$a_{225} = 15$$

である。

(答) $a_{225} = 15$

(3)

(2)より, 求めるものは $\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, \dots, 20\}, \{1, \dots, 15\}$ に含まれる数の総和なので,

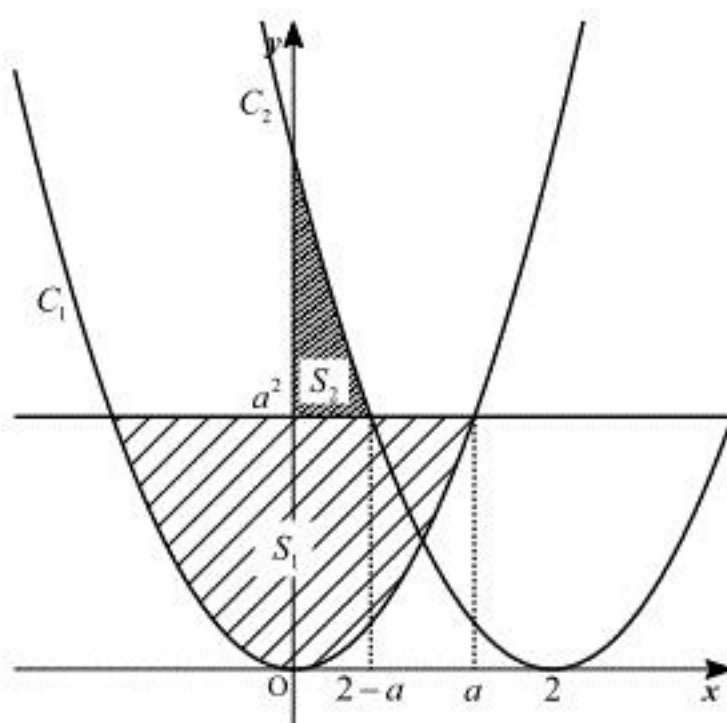
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{225} a_k &= \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^i j + \sum_{i=1}^{15} i \\ &= \sum_{i=1}^{20} \frac{i(i+1)}{2} + \frac{15 \cdot 16}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{20} \frac{i(i+1)(i+2) - (i-1)i(i+1)}{6} + 120 \\ &= \frac{20 \cdot 21 \cdot 22}{6} + 120 \\ &= 1660 \end{aligned}$$

である。

(答) $\sum_{k=1}^{225} a_k = 1660$

〔Ⅳ〕

(1)



前図より、

$$S_1 - S_2 = \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx - \int_0^{2-a} \{(x-2)^2 - a^2\} dx$$

である。ここで、定積分 $\int_0^{2-a} \{(x-2)^2 - a^2\} dx$ について $x-2=t$ とおけば、 $dx=dt$ となり、さらに $x:0 \rightarrow 2-a$ のとき $t:-2 \rightarrow -a$ であることに注意し、

$$\int_0^{2-a} \{(x-2)^2 - a^2\} dx = \int_{-2}^{-a} (t^2 - a^2) dt$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx - \int_{-2}^{-a} (x^2 - a^2) dx \\ &= \int_{-2}^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^a \\ &= a^2(a+2) - \frac{a^3+8}{3} \\ &= \frac{2}{3}(a+2)^2(a-1) \end{aligned}$$

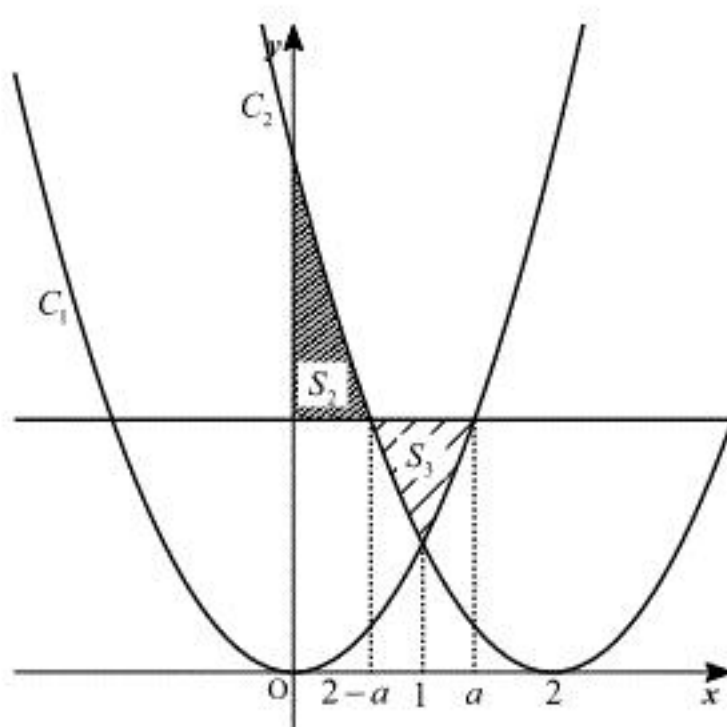
となり、 $S_1 = S_2$ のとき、 $0 < a < 2$ より、

$$\frac{2}{3}(a+2)^2(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

である。

(答) $a = 1$

(2)



放物線 C_1 と放物線 C_2 が直線 $x=1$ に関して対称であることに注意すれば、前図より、

$$\begin{aligned} 2S_2 - S_3 &= 2 \int_0^{2-a} \{(x-2)^2 - a^2\} dx - 2 \int_{2-a}^1 \{a^2 - (x-2)^2\} dx \\ &= 2 \int_0^1 \{(x-2)^2 - a^2\} dx \\ &= 2 \left[\frac{(x-2)^3}{3} - a^2 x \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{7}{3} - a^2 \right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $S_3 = 2S_2$ 、 $1 < a < 2$ より、

$$2 \left(\frac{7}{3} - a^2 \right) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

である。

(答) $a = \frac{\sqrt{21}}{3}$