

〔I〕

(1)

要素が3個で公差2の等差数列を数の小さいものから順に並べていくと、「1, 3, 5」, 「2, 4, 6」, 「3, 5, 7」, … 「 $2n-4, 2n-2, 2n$ 」となる。組み合わせ内の3数のうちもっとも小さい数に着目すると、組み合わせごとに1ずつ大きくなっているので、求める数列の選び方は $(2n-4)$ 通りである。

(答) $(2n-4)$ 通り

(2)

$2n$ 個の整数からどのような3個の数を選んでも、公差 n が以上の等差数列をつくることはできないので、交差が $n-1$ 以下の場合のみを考えればよい。

交差が k (k は $1 \leq k \leq n-1$ をみたす整数)であるような等差数列を(1)のときと同様に数の小さいものから順に並べていくと「1, $k+1, 2k+1$ 」, 「2, $k+2, 2k+2$ 」, … 「 $2n-2k, 2n-k, 2n$ 」のようになり、 $2n-2k$ 個存在することがわかる。よって、等差数列は全部で

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k) &= 2n(n-1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= n(n-1)\end{aligned}$$

だけ存在することになる。

また、 $2n$ 個の整数から3個選ぶ方法の数は全部で

$${}_{2n}C_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2}{3} n(n-1)(2n-1)$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{n(n-1)}{\frac{2}{3} n(n-1)(2n-1)} = \frac{3}{2(2n-1)}$$

となる。

(答) $\frac{3}{2(2n-1)}$

〔Ⅱ〕

(1)

実際に積分計算をおこなうと、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x (t^2 - 6t + 8) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t \right]_1^x \\ &= \frac{1}{3}(x^3 - 1) - 3(x^2 - 1) + 8(x - 1) \\ &= \frac{1}{3}(x - 1)(x - 4)^2 \end{aligned}$$

となるので、 $f(x) = 0$ を満たす x は $x = 1, 4$ である。

(答) $x = 1, 4$

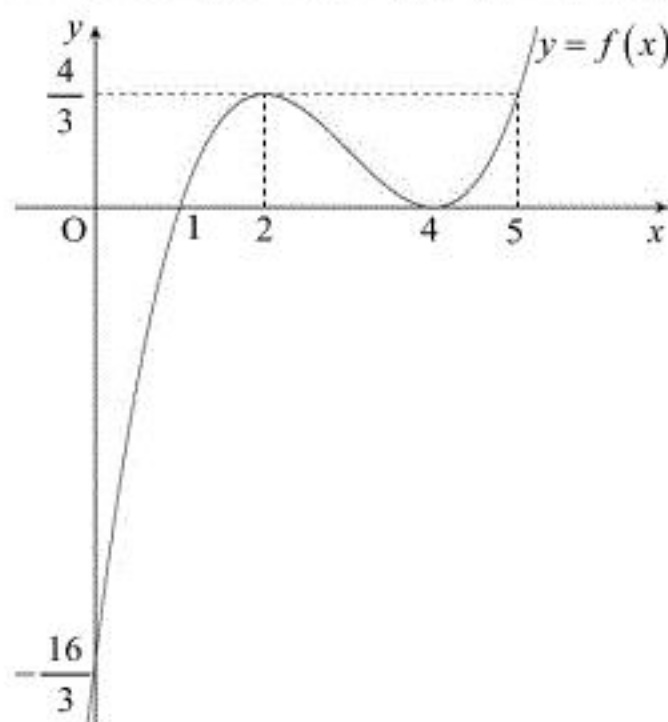
(2)

微積分学の基本定理により、

$$f'(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

であるから、 $f(x)$ の増減表とグラフの概形は下のようになる。

x	0	⋯	2	⋯	4	⋯	5
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$-\frac{16}{3}$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	$\frac{4}{3}$



よって、 $0 \leq x \leq 5$ における最大値は $f(2) = f(5) = \frac{4}{3}$ であり、最小値は $f(0) = -\frac{16}{3}$ である。

(答) 最大値 $\frac{4}{3}$ ($x = 2, 5$ のとき)

最小値 $-\frac{16}{3}$ ($x = 0$ のとき)

(3)

与えられた等式の左辺の積分計算をおこなうと、

$$\begin{aligned} &\int_x^{x+3} (t^2 - 6t + 8) dt \\ &= f(x+3) - f(x) \\ &= \frac{1}{3}(x+2)(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)(x-4)^2 \\ &= \frac{1}{3}(x-1) \{ (x+2)(x-1) - (x-4)^2 \} \\ &= 3(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

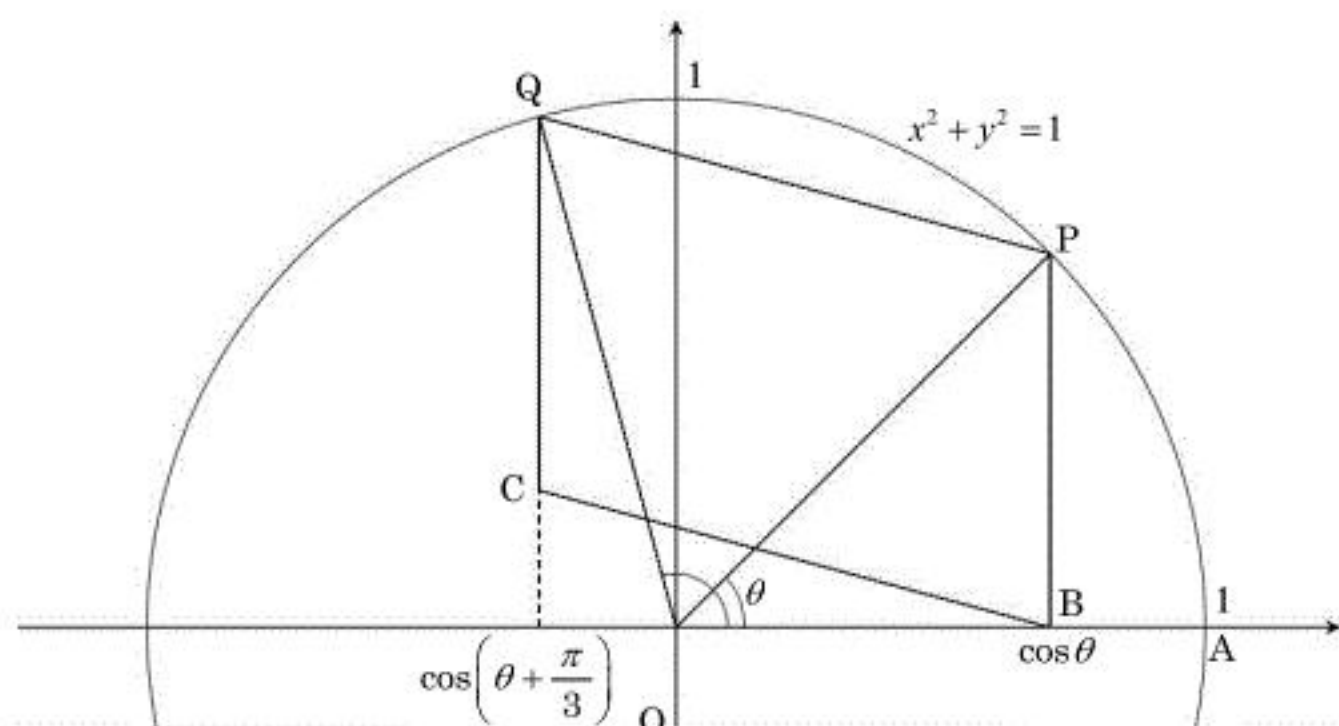
であるから、 $\int_x^{x+3} (t^2 - 6t + 8) dt = 0$ を満たす x は、 $x = 1, 2$ である。

(答) $x = 1, 2$

〔Ⅲ〕

(1)

$0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$ より $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$ であるから, $0 < \sin \theta \leq 1$, $0 < \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ である。点 P, Q の y 座標は正であることから, それらの座標それぞれ $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right)$ であることがわかる。ここで直線 BP は y 軸に平行であり, 四角形 BPQC は平行四辺形より $BP \parallel CQ$ であることから, 直線 CQ も y 軸と平行である。よって, 点 C も x 座標は点 Q の x 座標と等しく $x = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ である。



また, 平行四辺形の対辺の長さは等しいから,

$$CQ = BP = \sin \theta$$

となり, 点 C の y 座標は,

$$\begin{aligned} y &= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \sin \theta \\ &= \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} - \sin \theta \\ &= \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \theta \cdot \frac{1}{2} \\ &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

と求まる。よって, 点 C の座標は $C\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right)$ である。

$$(\text{答}) \ C\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right) \quad |$$

(2)

辺 CQ を平行四辺形 BPQC の底辺とみなすと, その高さは,

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos \theta - \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

である。 $CQ = \sin \theta$ であるから, 平行四辺形の面積を $S(\theta)$ とおくと,

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \sin \theta \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

と表すことができる。 $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$ より $\frac{\pi}{6} < 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}$ であるから,

$$-1 \leq \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

という不等式が成り立ち, $S(\theta)$ の最大値は

$$-\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

と求まる。またこのとき, $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ であるから,

$$\begin{aligned} 2\theta + \frac{\pi}{6} &= \pi \\ \therefore \theta &= \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\theta = \frac{5\pi}{12} \text{ のとき})$$

[IV]

(1)

2つのベクトル

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

は一次独立であるから、点 A, B, C と同一平面上に存在する点 D はこれらのベクトルと実数 s, t を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= s\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -s+3t \\ 4s-3t \\ -5s-3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように表すことができる。また、 a, z を用いて $\overrightarrow{AD}$ を表すと、

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -8+5a \\ 14-8a \\ z-3 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} -s+3t \\ 4s-3t \\ -5s-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+5a \\ 14-8a \\ z-3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。この3つの等式の1つ目と2つ目を連立させて s, t を a で表すと、

$$\begin{aligned} s &= 2-a \\ t &= -2 + \frac{4}{3}a \end{aligned}$$

となり、これより z は、

$$\begin{aligned} z &= 3-5s-3t \\ &= 3-5(2-a)-3\left(-2+\frac{4}{3}a\right) \\ &= a-1 \end{aligned}$$

と表すことができる。

(答) $z = a-1$

(2)

点 P は直線 AB 上の点なので、実数 u を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AB} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-u \\ 4u \\ 3-5u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表すことができる。また点 P は、点 D が描く直線上の点でもあるから、等式

$$\begin{pmatrix} -7+5a \\ 14-8a \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-u \\ 4u \\ 3-5u \end{pmatrix}$$

を満たす a, u を求めれば、点 P の座標がわかる。実際に連立させて求めると、

$$u = \frac{1}{2}, a = \frac{3}{2}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と求まる。同様に、点 Q は実数 v を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+3v \\ -3v \\ 3-3v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表すことができ、点 D が描く直線上の点でもあるから、等式

$$\begin{pmatrix} -7+5a \\ 14-8a \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3v \\ -3v \\ 3-3v \end{pmatrix}$$

を満たす a, v を求めれば点 Q の座標がわかる。実際に解くと

$$v = \frac{2}{3}, a = 2$$

と求まるから、

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(答) $P\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right), Q(3, -2, 1)$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= u\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} &= v\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{2}, \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{3}$$

となる。また、

$$S_1 = \triangle ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$$

$$S_2 = \triangle APQ = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\sin\angle BAC$$

であるから、求める値は、

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{3}$