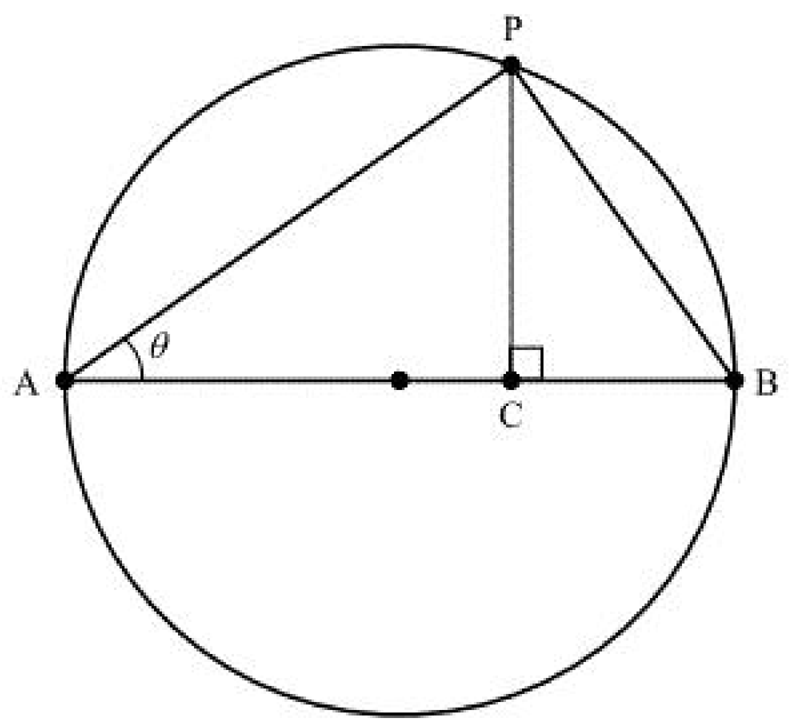
〔Ⅰ〕



(1)

線分ABを直径とする円周上の点Pについて

$$\angle \mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つから，△APBは直角三角形である。よって，$\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とするとき，$\mathrm{AB}=1$ より

$$\mathrm{AP}=\cos\theta,\ \mathrm{BP}=\sin\theta$$

となる。

(答) $\mathrm{AP}=\cos\theta,\ \mathrm{BP}=\sin\theta$

(2)

△APCは直角三角形であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PC}&=\mathrm{AP}\sin\theta\\&=\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

となる。よって，△APCと△BPCの周の長さの和 L は

$$\begin{aligned}L&=\mathrm{AP}+\mathrm{PC}+\mathrm{CA}+\mathrm{BP}+\mathrm{PC}+\mathrm{CB}\\&=\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{AB}+2\mathrm{PC}\ (\because \mathrm{CA}+\mathrm{CB}=\mathrm{AB})\\&=\cos\theta+\sin\theta+1+2\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

である。

(答) $L=\cos\theta+\sin\theta+1+2\cos\theta\sin\theta$

(3)

$\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ であり△APBの内角を考えて

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \qquad \cdots ①$$

となる。このもとで

$$\begin{aligned}L&=\cos\theta+\sin\theta+1+2\cos\theta\sin\theta\\&=\cos\theta+\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta\\&=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)\end{aligned}$$

となるから，$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと

$$\begin{aligned}L&=t^2+t\\&=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

とかける。ここで

$$\begin{aligned}t&=\sin\theta+\cos\theta\\&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

であるから，①のとき

$$-1<t\leqq\sqrt{2}$$

となる。よって，L は

$t=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2+\sqrt{2}$

をとり，さらに $t=\sqrt{2}$ となるのは

$$\begin{aligned}&t=\sqrt{2}\\&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\&\Leftrightarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1\\&\Leftrightarrow \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\\&\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

のときである。

(答) $2+\sqrt{2}$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\text{のとき}\right)$

〔Ⅱ〕

(1)

点A$\left(a, \frac{1}{2}\right)$が$y<4x-4x^2$の表す領域内に存在するとき

$$\frac{1}{2}<4a-4a^2$$
$$\Leftrightarrow 8a^2-8a+1<0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{4}<a<\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

である。

(答) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}<a<\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

(2)

点Aを通り傾きmの直線ℓの方程式は

$$y=m(x-a)+\frac{1}{2}$$

であるから，直線ℓと放物線$y=4x-4x^2$の交点のx座標は，方程式

$$m(x-a)+\frac{1}{2}=4x-4x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+(m-4)x-ma+\frac{1}{2}=0$$

の解である。この方程式は2つの異なる実数解をもつから，それらを$\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$とおくと解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{m-4}{4}$$

$$\alpha\beta=\frac{-2ma+1}{8}$$

となる。したがって，直線ℓと放物線$y=4x-4x^2$で囲まれた部分の面積Sは

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^\beta\left[\left(4x-4x^2\right)-\left\{m(x-a)+\frac{1}{2}\right\}\right]dx\\
&=-4\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=\frac{4}{6}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{2}{3}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{1}{96}\left\{m^2+8(2a-1)m+8\right\}^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{1}{96}\left[\left\{m+4(2a-1)\right\}^2-16(2a-1)^2+8\right]^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

となるから，Sの最小値$g(a)$を与えるmは

$$\begin{aligned}
m&=-4(2a-1)\\
&=-8a+4
\end{aligned}$$

である。

(答) $m=-8a+4$

(3)

(2)の結果より

$$g(a)=\frac{1}{96}\left\{-16(2a-1)^2+8\right\}^{\frac{3}{2}}$$

となる。(1)の結果より$\frac{2-\sqrt{2}}{4}<a<\frac{2+\sqrt{2}}{4}$であるから，この範囲で$g(a)$を最大にする$a$の値は

$$a=\frac{1}{2}$$

であり，(2)の結果より

$$m=0$$

となるから，このときの直線ℓの方程式は

$$y=\frac{1}{2}$$

となる。

(答) $a=\frac{1}{2},\ \ell: y=\frac{1}{2}$

〔Ⅲ〕

さいころを投げたとき，各目の出方は同様に確からしいとする。

(1)

出る目の最小値が3以上になるのは，3個のさいころの出る目がすべて3以上になる場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$$

となる。

(答) $\frac{8}{27}$

(2)

3個のさいころを投げたときのすべての目の出方は6^3通りである。3個のうち，いずれか2個の目の和が8になるとき，その2個の目の組み合わせは

$$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4)$$

がある。

[1] $(2,\ 6),\ (3,\ 5)$を含むとき

[i] 残りの1つの目が異なる目であるとき

残りの1つの目の選び方は4通りあり，それぞれの場合についてさいころと出る目の組み合わせは$3!$通りあるから，このようになる場合の数は$4\times 3!=24$(通り)ある。

[ii] 残りの1つの目がいずれかと同じ目であるとき

残りの1つの目の選び方は2通りあり，それぞれの場合についてさいころと出る目の組み合わせは${}_3C_2$通りあるから，このようになる場合の数は$2\times{}_3C_2=6$(通り)ある。

以上，[i], [ii]は互いに排反であるから，このようになる場合の数は全部で

$$2\times(24+6)=60\ (\text{通り})$$

ある。

[2] $(4,\ 4)$を含むとき

[i] 残りの1つの目が4以外であるとき

残りの1つの目の選び方は5通りあり，それぞれの場合についてさいころと出る目の組み合わせは${}_3C_2$通りあるから，このようになる場合の数は$5\times{}_3C_2=15$(通り)ある。

[ii] 残りの1つの目が4であるとき

このようになる場合の数は1通りである。

以上，[i], [ii]は互いに排反であるから，このようになる場合の数は全部で

$$15+1=16\ (\text{通り})$$

ある。

以上，[1], [2]の場合は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{60+16}{6^3}=\frac{19}{54}$$

である。

(答) $\frac{19}{54}$

(3)

「出る目の最小値が2以下になり，かつどの2個の目の和も8でない」という事象の余事象は「出る目の最小値が3以上になる，またはいずれか2個の目の和が8になる」という事象である。以下，事象Xに対してXが起こる場合の数を$n(X)$と表すこととし

事象A：出る目の最小値が3以上になる

事象B：いずれか2個の目の和が8になる

とすると，余事象の場合の数は

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

となる。ここで，事象Bにおいて和が8に2個の目の組み合わせは$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4)$があり，このうち出る目の最小値が3以上になりうるのは$(3,\ 5),\ (4,\ 4)$である。

[1] $(3,\ 5)$を含むとき

[i] 残りの1つの目が3, 5以外であるとき

出る目の最小値が3以上になるのは残りの1つの目が4または6となるときであり，それぞれの場合についてさいころと出る目の組み合わせは$3!$通りあるから，このようになる場合の数は$2\times 3!=12$(通り)ある。

[ii] 残りの1つの目が3または5であるとき

残りの1つの目の選び方は2通りあり，それぞれの場合についてさいころと出る目の組み合わせは${}_3C_2$通りあるから，このようになる場合の数は$2\times{}_3C_2=6$(通り)ある。

以上，[i], [ii]は互いに排反であるから，このようになる場合の数は全部で

$$12+6=18\ (\text{通り})$$

ある。

[2] $(4,\ 4)$を含むとき

[i] 残りの1つの目が4以外であるとき

出る目の最小値が3以上になるのは残りの1つの目が3, 5, 6のいずれかとなるときであり，それぞれの場合についてさいころと出る目の組み合わせは${}_3C_2$通りあるから，このようになる場合の数は$3\times{}_3C_2=9$(通り)ある。

[ii] 残りの1つの目が4であるとき

このようになる場合の数は1通りである。

以上，[i], [ii]は互いに排反であるから，このようになる場合の数は全部で

$$9+1=10\ (\text{通り})$$

ある。

以上，[1], [2]の場合は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=18+10\\&=28\end{aligned}$$

となる。また，(1), (2)の結果より

$$n(A)=4^3,\ n(B)=76$$

であるから

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=4^3+76-28\\&=112\end{aligned}$$

となる。よって，求める「出る目の最小値が2以下になり，かつどの2個の目の和も8でない」確率は

$$1-\frac{112}{6^3}=\frac{13}{27}$$

である。

(答) $\frac{13}{27}$

〔IV〕

(1)

$\triangle$ABCについて余弦定理より

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$
$$= \frac{3^2 + 5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$= \frac{1}{3}$$

となるから，$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の内積は

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\angle BAC$$
$$= 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}$$
$$= 5$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$

(2)

$0 < \angle BAC < \pi$ であるから $\sin\angle BAC > 0$ である。よって，(1)の結果を用いて

$$\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となる。$\left|\overrightarrow{AO}\right|$ は$\triangle$ABCの外接円の半径であるから，$\triangle$ABCについて正弦定理より

$$\left|\overrightarrow{AO}\right| = \frac{BC}{2\sin\angle BAC}$$
$$= \frac{2\sqrt{6}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となる。

(答) $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(3)

$AO = BO = CO$ であり，$AB \perp OM$, $AC \perp ON$ であるから，点M, Nはそれぞれ線分AB, ACの中点となる。よって

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

となる。また，$BD:DC = s:1-s$ であるとき

$$\overrightarrow{AD} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

となり，$\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AD}$ とするとき

$$\overrightarrow{AO} = k(1-s)\overrightarrow{AB} + ks\overrightarrow{AC} \qquad \cdots ①$$

である。したがって，

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM}$$
$$= \left\{k(1-s)\overrightarrow{AB} + ks\overrightarrow{AC}\right\} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$= \left\{k(1-s) - \frac{1}{2}\right\}\overrightarrow{AB} + ks\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AN}$$
$$= \left\{k(1-s)\overrightarrow{AB} + ks\overrightarrow{AC}\right\} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$= k(1-s)\overrightarrow{AB} + \left(ks - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{MO} = \left\{k(1-s) - \frac{1}{2}\right\}\overrightarrow{AB} + ks\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NO} = k(1-s)\overrightarrow{AB} + \left(ks - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}$

(4)

$AB \perp OM$, $AC \perp ON$ であるから

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{k(1-s) - \frac{1}{2}\right\}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + ks\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{k(1-s) - \frac{1}{2}\right\} \cdot 3^2 + ks \cdot 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8ks - 18k + 9 = 0 \qquad \cdots ②$$

かつ

$$\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$
$$\Leftrightarrow k(1-s)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \left(ks - \frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow k(1-s) \cdot 5 + \left(ks - \frac{1}{2}\right) \cdot 5^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8ks + 2k - 5 = 0 \qquad \cdots ③$$

が成り立つ。②，③より

$$\begin{cases} 8ks - 18k + 9 = 0 \\ 8ks + 2k - 5 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20k = 14 \\ 8ks + 2k - 5 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (k, s) = \left(\frac{7}{10}, \frac{9}{14}\right)$$

となるから，①より

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{20}\overrightarrow{AC}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{20}\overrightarrow{AC}$