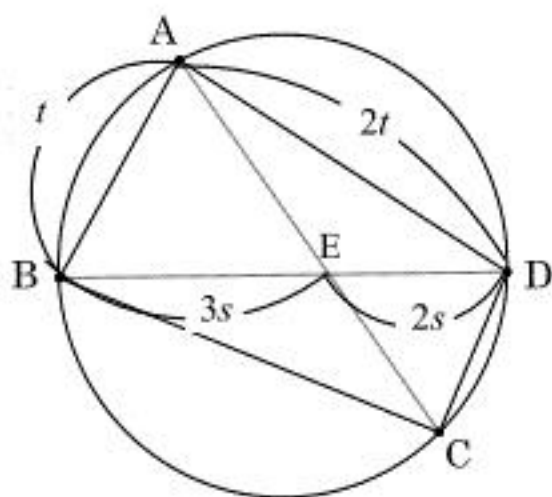


〔I〕

(1)



B, D から AC に垂線を下ろすと、その垂線の長さの比は、 $BE:ED=3:2$ であるから $3:2$ である。 $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ の底辺を線分 AC として見てやると、高さの比が $3:2$ であるから、

$$S_1:S_2=3:2$$

である。

(答) $S_1:S_2=3:2$

(2)

円に内接する四角形の性質から $\angle ABC + \angle ADC = \pi$ より、 $\sin \angle ABC = \sin \angle ADC$ であるから、

$$\frac{3}{2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD \cdot \sin \angle ADC} = \frac{BC}{2CD}$$

である。よって、

$$BC:CD=3:1$$

である。

(答) $BC:CD=3:1$

(3)

四角形 ABCD を $\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ に分けて考える。

まず余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos \angle BAD \\ &= 28 \end{aligned}$$

である。 $x > 0$ の実数として $CD = x$ とおくと、 $\triangle CBD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} 28 &= x^2 + (3x)^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cos 60^\circ \\ &= 7x^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$x=2$$

である。よって

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin \angle BAD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle CBD = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CD \sin \angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

であるから、四角形 ABCD の面積は $5\sqrt{3}$ である。

(答) $5\sqrt{3}$

〔Ⅱ〕

(1)

コインの表裏の出方、つまり A, B の勝敗の仕方によって場合分けをする。

[1] どちらかが 2 回とも勝った場合

2 回終わったあと、2 人の持っているボールの個数が同じになるのは、勝った人が引くカードが 2 枚とも 0 だったときである。つまり、

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{32}$$

である。

[2] A と B が 1 回ずつ勝った場合

2 回終わったあと、2 人の持っているボールの個数が同じになるのは、A と B が同じ数字のカードを引くときである。つまり、

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4 \times 4} = \frac{1}{8}$$

である。

求める確率は、[1]と[2]を合わせて、

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{5}{32}$$

である。

(答) $\frac{5}{32}$

(2)

コインの表裏の出方、つまり A, B の勝敗の仕方によって場合分けをする。

[1] A が 2 回続けて勝った場合

以下 $(i, j) = (1 \text{ 回目に引いたカードの数}, 2 \text{ 回目に引いたカードの数})$ と表すことにすると、A は $(0, 1), (1, 0)$ とカードを引けばよい。つまり、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{16} = \frac{1}{32}$$

である。

[2] A と B が 1 回ずつ勝った場合

A が 1, B が 0, または A が 2, B が 1, または A が 3, B が 2 と引けばよいので、

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{32}$$

である。

求める確率は、[1]と[2]を合わせて、

$$\frac{1}{32} + \frac{3}{32} = \frac{1}{8}$$

である。

(答) $\frac{1}{8}$

(3)

コインの表裏の出方、つまり A, B の勝敗の仕方によって場合分けをする。

[1] どちらかが 3 回勝った場合

勝った人が全て 0 を引けばよいので、

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{256}$$

である。

[2] どちらかが 2 回勝った場合

以下 $(ij, k) = (2 \text{ 回勝った方の人の引いた数 } 2 \text{ つ}, 1 \text{ 回勝った方の人の引いた数})$ とすると、条件を満たすのは $(00, 0), (01, 1), (02, 2), (11, 2), (03, 3), (12, 3)$ の場合であるから

$$2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1+2+2+1+2+2}{4^3} = \frac{30}{256}$$

である。

求める確率は、[1]と[2]を合わせて、

$$\frac{1}{256} + \frac{30}{256} = \frac{31}{256}$$

である。

(答) $\frac{31}{256}$

〔Ⅲ〕

(1)

$\int_0^1 f(x) dx = 0$ のとき, $f'(x) = 1$ であるから, C を定数として

$$f(x) = x + C$$

と表せる。仮定より $\int_0^1 f(x) dx = 0$ であり, 一方で

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + Cx \right]_0^1 = \frac{1}{2} + C$$

であるから, $C = -\frac{1}{2}$ である。よって, 求める関数は

$$f(x) = x - \frac{1}{2}$$

である。

$$(答) \quad f(x) = x - \frac{1}{2}$$

(2)

$A = \int_0^1 f(x) dx$ とおくと, $f'(x) = 18Ax + 1$ であるから, B を定数として

$$f(x) = 9Ax^2 + x + B$$

である。 $A = \int_0^1 f(x) dx$ であるから,

$$A = \int_0^1 (9Ax^2 + x + B) dx$$

$$\Leftrightarrow A = 3A + \frac{1}{2} + B$$

$$\Leftrightarrow B = -2A - \frac{1}{2}$$

である。一方, 2 次方程式 $f(x) = 0$ はただ一つの実数解を持つから

$$1^2 - 4 \cdot 9A \cdot B = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 36A \left(-2A - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 72A^2 + 18A + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}$$

である。この 2 つを $f(x)$ に代入すると,

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}$$

となる。

$$(答) \quad f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}$$

〔Ⅳ〕

(1)

点 G は $\triangle O_1A_1B_1$ の重心であるから

$$\begin{aligned} |\overline{GO_1}|^2 &= \left| -\frac{\overline{a} + \overline{b}}{3} \right|^2 = \frac{1}{9} \left(3^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} + (\sqrt{6})^2 \right) = 2 \\ \therefore |\overline{GO_1}| &= \sqrt{2} \\ |\overline{GA_1}|^2 &= \left| -\frac{\overline{a} + \overline{b}}{3} + \overline{a} \right|^2 = \left(\frac{4}{9} 3^2 - 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{9} (\sqrt{6})^2 \right) = 4 \\ \therefore |\overline{GA_1}| &= 2 \\ |\overline{GB_1}|^2 &= \left| -\frac{\overline{a} + \overline{b}}{3} + \overline{b} \right|^2 = \left(\frac{1}{9} 3^2 - 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{9} (\sqrt{6})^2 \right) = 3 \\ \therefore |\overline{GB_1}| &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad |\overline{GO_1}| = \sqrt{2}, |\overline{GA_1}| = 2, |\overline{GB_1}| = \sqrt{3}$$

(2)

任意の自然数 n に対して $\triangle O_nA_nB_n$ の重心は G であることを数学的帰納法を用いて示す。

[i] $n=1$ のとき $\triangle O_nA_nB_n$ の重心は問題文より G である。

[ii] k を自然数として、 $n=k$ のとき $\triangle O_kA_kB_k$ の重心が G であるとき、

$$\overline{O_kG} = \frac{\overline{O_kA_k} + \overline{O_kB_k}}{3}$$

と表すことができる。

$n=k+1$ のときの重心を G_{k+1} とおくと、

$$\begin{aligned} \overline{O_kG_{k+1}} &= \overline{O_kO_{k+1}} + \frac{\overline{O_{k+1}A_{k+1}} + \overline{O_{k+1}B_{k+1}}}{3} \\ &= \frac{1}{2} (\overline{O_kA_k} + \overline{O_kB_k}) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (\overline{O_kA_k} + \overline{O_kB_k}) \\ &= \frac{\overline{O_kA_k} + \overline{O_kB_k}}{3} \\ &= \overline{O_kG} \end{aligned}$$

となる。よって、 G と G_{k+1} は同じ点であるから、 $\triangle O_{k+1}A_{k+1}B_{k+1}$ の重心も G となる。

以上[i], [ii]より、数学的帰納法によって任意の自然数 n に対して $\triangle O_nA_nB_n$ の重心が G であることが示された。

(証明終)

(3)

あらゆる n について $\triangle O_nA_nB_n$ は相似である。その相似比は、 $\triangle O_nA_nB_n : \triangle O_{n+1}A_{n+1}B_{n+1} = 2:1$ である。また、 G を中心とする円に $\triangle O_nA_nB_n$ が含まれるためには、 G から一番遠い頂点を半径とする円を考えればよい。(1)より、 G から一番遠い頂点は点 A_n である。 $|\overline{GA_1}| = 2$ であるから、

$$|\overline{GA_n}| = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

である。 $\triangle O_nA_nB_n$ が半径 10^{-4} の円の内部に含まれる三角形であるとき、

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \leq 10^{-4}$$

が成り立つ。これを変形すると、

$$\begin{aligned} 2^{2-n} &\leq 10^{-4} \\ \Leftrightarrow (2-n) \log_{10} 2 &\leq -4 \\ \Leftrightarrow (2-n) \times 0.3010 &\leq -4 \\ \Leftrightarrow n &\geq 2 + \frac{4}{0.3010} = 15.2... \end{aligned}$$

である。よって、条件を満たす最小の n は $n=16$ である。

(答) $n=16$