

平成 25 年 度

入学者選抜学力試験問題

数 学 (前期)

(注 意)

1. 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. この冊子の問題は 2 ページからなる。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば申し出ること。
3. 監督者の指示に従って、解答用紙(4 枚)すべてに受験番号および氏名を必ず記入すること。
4. 解答は、必ず解答用紙(4 枚)の指定された枠内に記入すること。書ききれない場合は解答用紙の裏面の指定された枠内に記入すること。
5. この問題冊子は持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 円に内接する四角形 ABCD において、 $AD = 2AB$ とする。また、対角線 AC と BD の交点 E が BD を $3 : 2$ に内分するとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積を S_1 、 $\triangle ACD$ の面積を S_2 とするとき、 $S_1 : S_2$ を求めよ。
- (2) $BC : CD$ を求めよ。
- (3) $\angle BAD = 120^\circ$ 、 $AB = 2$ とするとき、四角形 ABCD の面積を求めよ。

〔Ⅱ〕 A と B の 2 人がそれぞれ 9 個のボールを持っていて、次のようなゲームを行う。まずどちらかが硬貨を投げ、表であれば A の勝ち、裏であれば B の勝ちとする。勝者は 0 から 3 までの数が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードから無作為に 1 枚を取り出し、書かれている数だけ敗者からボールを受け取る。ただし、取り出したカードはもとに戻すものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) このゲームを 2 回続けて行ったとき、2 人の持っているボールの個数が同じである確率を求めよ。
- (2) このゲームを 2 回続けて行ったとき、A が B よりも 2 個多くボールを持っている確率を求めよ。
- (3) このゲームを 3 回続けて行ったとき、2 人の持っているボールの個数が同じである確率を求めよ。

〔Ⅲ〕 関数 $f(x)$ は $f'(x) = 18 \int_0^1 xf(t) dt + 1$ を満たす。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^1 f(x) dx = 0$ のとき、 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\int_0^1 f(x) dx \neq 0$ であり、方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ。このとき、 $f(x)$ を求めよ。

〔Ⅳ〕 $\triangle O_1A_1B_1$ において辺 A_1B_1 , B_1O_1 , O_1A_1 の中点をそれぞれ O_2 , A_2 , B_2 とする。次に、 $\triangle O_2A_2B_2$ において辺 A_2B_2 , B_2O_2 , O_2A_2 の中点をそれぞれ O_3 , A_3 , B_3 とする。これをくり返して、 $\triangle O_nA_nB_n$ において辺 A_nB_n , B_nO_n , O_nA_n の中点をそれぞれ O_{n+1} , A_{n+1} , B_{n+1} とする。ただし、 $n = 1, 2, 3, \dots$ である。また、 $\overrightarrow{O_1A_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{O_1B_1} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{6}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$ である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\triangle O_1A_1B_1$ の重心を G とするとき、 $|\overrightarrow{GO_1}|$, $|\overrightarrow{GA_1}|$, $|\overrightarrow{GB_1}|$ の値を求めよ。

(2) $\triangle O_nA_nB_n$ の重心が G であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) $\triangle O_nA_nB_n$ が G を中心とする半径 10^{-4} の円の内部に含まれる最小の n の値を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。