

〔I〕

(1)

異なる 9 枚のカードから無作為に 1 枚取り出す試行を 4 回繰り返すとき、その取り出し方の総数は 9^4 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。 a_1, a_2, a_3, a_4 がすべて異なる選び方は ${}_9P_4$ 通りであるから、求める確率は

$$\frac{{}_9P_4}{9^4} = \frac{112}{243}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{112}{243}$$

(2)

a_1, a_2, a_3, a_4 が異なる 2 種類の番号をそれぞれ 2 個ずつ含むように取り出す方法の総数は、まず異なる 2 種類の番号を選び、それらの数を a_1, a_2, a_3, a_4 に分配する場合の数と一致する。異なる 2 種類の番号の選び方は ${}_9C_2$ 通りであり、それらの数の分配の仕方は ${}_4C_2$ 通りであるから、求める確率は

$$\frac{{}_9C_2 \cdot {}_4C_2}{9^4} = \frac{8}{243}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8}{243}$$

(3)

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ となるような取り出し方の総数は、9 枚のカードから無作為に 4 枚のカードを取り出し小さい順に並べる場合の数に一致する。これは ${}_9C_4$ 通りであるから、求める確率は

$$\frac{{}_9C_4}{9^4} = \frac{14}{729}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{14}{729}$$

(4)

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ となるような取り出し方の総数は、9 枚のカードから重複を許して 4 枚のカードを取り出し小さい順に並べる場合の数に一致する。これは ${}_9H_4 (= {}_{12}C_4)$ 通りであるから、求める確率は

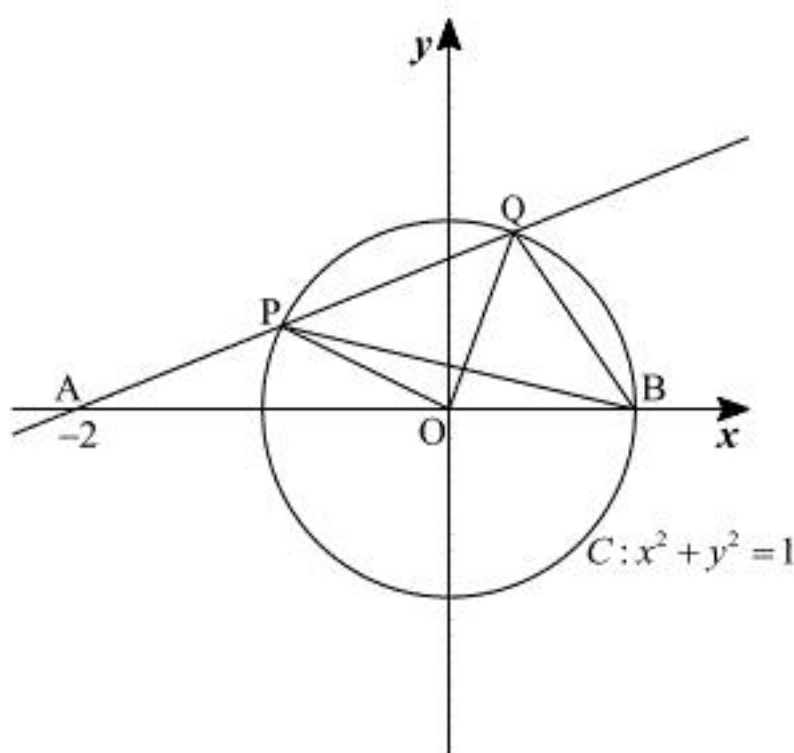
$$\frac{{}_9H_4}{9^4} = \frac{{}_{12}C_4}{9^4} = \frac{55}{729}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{55}{729}$$

〔Ⅱ〕

(1)



$\triangle BPQ$, $\triangle OPQ$ について、辺 PQ を底面とみなすと、底面の長さは共通であるから、高さの比と面積比は一致する。直線 AP の傾きを a とおくと、 P, Q の y 座標が正であるから $a > 0$ であり、直線の方程式は $A(-2, 0)$ を通るから $y = a(x + 2)$ となる。ここで点と直線の距離の公式より、 $\triangle BPQ$ の高さは

$$\frac{|a \cdot 1 - 0 + 2a|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{3a}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (\because a > 0)$$

となり、 $\triangle OPQ$ の高さは

$$\frac{|a \cdot 0 - 0 + 2a|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (\because a > 0)$$

となる。したがって、求める面積比は

$$S_1 : S_2 = \frac{3a}{\sqrt{1 + a^2}} : \frac{2a}{\sqrt{1 + a^2}} = 3 : 2$$

となる。

(答) $S_1 : S_2 = 3 : 2$

(2)

$\angle POQ = \theta$ のとき、 $\triangle OPQ$ の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ = \frac{1}{2} \sin \theta$$

と表せるから、(1)の結果より $\triangle BPQ$ の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{3}{2} S_2 = \frac{3}{4} \sin \theta$$

と表せる。

(答) $S_1 = \frac{3}{4} \sin \theta$

(3)

(1)の図より、等式

$$\triangle BPQ + \triangle OPB = \triangle OPQ + \triangle OQB$$

が成立することに着目する。ここで、 $\angle BOQ = \angle POQ = \theta$ のとき

$$\triangle OPB = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OP \cdot \sin \angle BOP = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\triangle OQB = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OQ \cdot \sin \angle BOQ = \frac{1}{2} \sin \theta$$

と表せるから、(1), (2)の結果と合わせて

$$\triangle BPQ + \triangle OPB = \triangle OPQ + \triangle OQB$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \sin \theta \quad (\because \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{4} \quad (\because \sin \theta \neq 0)$$

が成り立つ。点 Q の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ と表せるから、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (\because \sin \theta > 0) \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

より $Q\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ と求まり、 S_1 は

$$S_1 = \frac{3}{4} \sin \theta = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

となる。

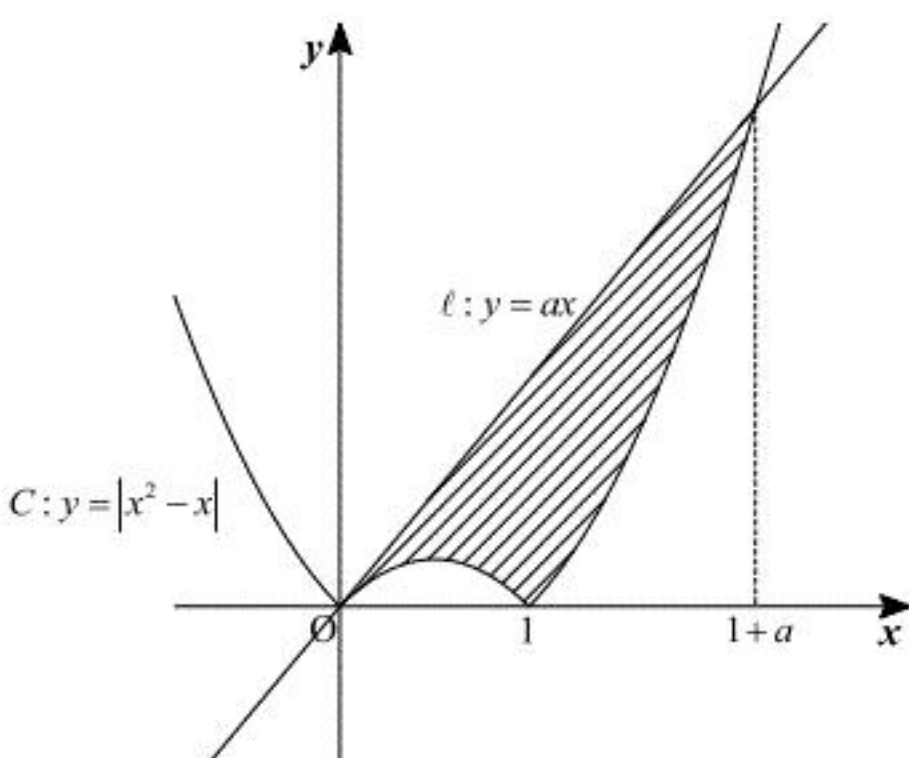
(答) $Q\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right), S_1 = \frac{3\sqrt{15}}{16}$

〔Ⅲ〕

(1)

曲線 $y=-(x^2-x)$ 上の点 $(0,0)$ における接線の傾きは、 $y'=-2x+1$ より 1 である。以下 a の値と 1 の大小で場合分けして考える。

[1] $a \geq 1$ のとき



曲線 $C: y=|x^2-x|$ と直線 $l: y=ax$ のグラフは上のようになる。2つのグラフは $1 < x$ の領域で交わり、その交点の x 座標は

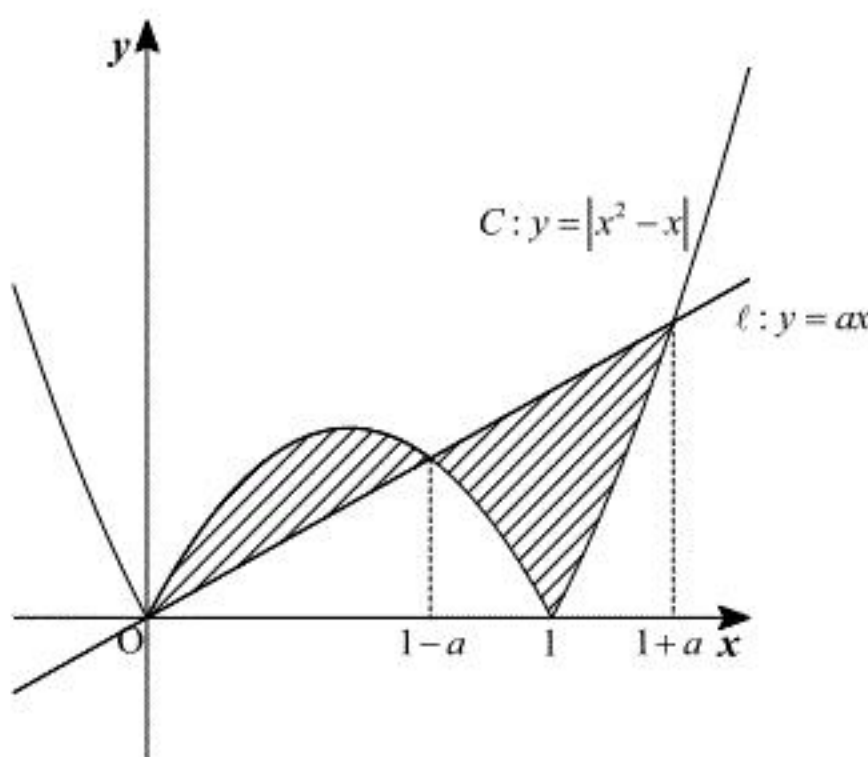
$$\begin{aligned} x^2 - x &= ax \\ \Leftrightarrow x(x-1-a) &= 0 \\ \therefore x &= 1+a \quad (>1) \end{aligned}$$

である。したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{1+a} (ax - |x^2 - x|) dx \\ &= \int_0^1 (ax + x^2 - x) dx + \int_1^{1+a} (ax - x^2 + x) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1-a}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1+a}{2} x^2 \right]_1^{1+a} \\ &= \frac{a^3 + 3a^2 + 3a - 1}{6} \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 < a < 1$ のとき



2つのグラフは $0 < x < 1$, $1 < x$ の各領域でそれぞれ交わり、その交点の x 座標は

$$\begin{aligned} |x^2 - x| &= ax \\ \Leftrightarrow x|x-1| &= ax \quad (\because x > 0) \\ \Leftrightarrow x(|x-1|-a) &= 0 \\ \therefore x &= 1 \pm a \quad (\because 0 < a < 1) \end{aligned}$$

である。したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{1-a} (-x^2 + x - ax) dx + \int_{1-a}^1 (ax + x^2 - x) dx + \int_1^{1+a} (ax - x^2 + x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1-a}{2} x^2 \right]_0^{1-a} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1-a}{2} x^2 \right]_{1-a}^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1+a}{2} x^2 \right]_1^{1+a} \\ &= \frac{-a^3 + 9a^2 - 3a + 1}{6} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、 S は a を用いて

$$a \geq 1 \text{ のとき } S = \frac{a^3 + 3a^2 + 3a - 1}{6}, \quad 0 < a < 1 \text{ のとき } S = \frac{-a^3 + 9a^2 - 3a + 1}{6}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad a \geq 1 \text{ のとき } S = \frac{a^3 + 3a^2 + 3a - 1}{6}, \quad 0 < a < 1 \text{ のとき } S = \frac{-a^3 + 9a^2 - 3a + 1}{6}$$

(2)

(1)の結果より、 $a \geq 1$ のとき S を a で微分すると

$$\frac{dS}{da} = \frac{(a+1)^2}{2} > 0$$

となるため、 S は a に関して単調に増加する。また、 $0 < a < 1$ のとき S を a で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= \frac{-3a^2 + 18a - 3}{6} \\ &= -\frac{1}{2}(a^2 - 6a + 1) \\ &= -\frac{1}{2}\{a - (3 - 2\sqrt{2})\}\{a - (3 + 2\sqrt{2})\} \end{aligned}$$

となり、ここで $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$, $1 < 3 + 2\sqrt{2}$ であることに注意する。以上の考察より、 $a > 0$ における S の増減表は以下になる。

a	0	...	$3 - 2\sqrt{2}$	...	1	...
S'	$\times$	-	0	+		+
S	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

したがって、 S は $a = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき最小となり、 $0 < a < 1$ における S の式を変形すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{-a^3 + 9a^2 - 3a + 1}{6} \\ &= \frac{(a^2 - 6a + 1)(-a + 3) + 16a - 2}{6} \end{aligned}$$

となるから、最小値は

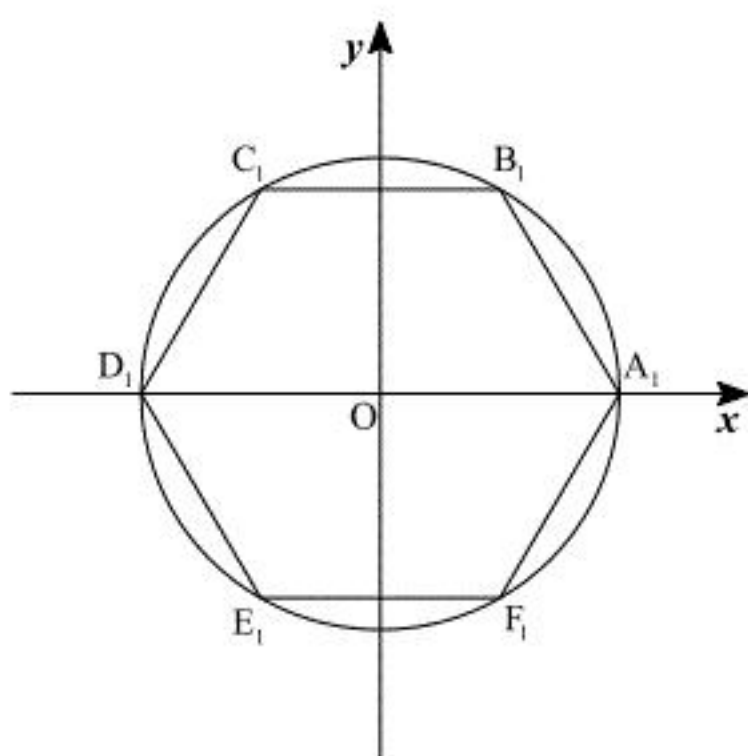
$$\begin{aligned} S &= \frac{16(3 - 2\sqrt{2}) - 2}{6} \\ &= \frac{23 - 16\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S \text{ は } a = 3 - 2\sqrt{2} \text{ のとき最小値 } \frac{23 - 16\sqrt{2}}{3} \text{ をとる}$$

〔Ⅳ〕

(1)



点 X_n で点 $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$ のいずれかを表すものとする。問題文より

$$\overrightarrow{OX_n} = n\overrightarrow{OX_1}$$

であるから、 $\overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{B_3C_7}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC_1} &= \overrightarrow{A_1B_1} \\ &= \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} \\ &= -\vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{B_3C_7} &= \overrightarrow{OC_7} - \overrightarrow{OB_3} \\ &= 7\overrightarrow{OC_1} - 3\overrightarrow{OB_1} \\ &= 7(-\vec{a} + \vec{b}) - 3\vec{b} \\ &= -7\vec{a} + 4\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC_1} = -\vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{B_3C_7} = -7\vec{a} + 4\vec{b}$$

(2)

点 P が辺 A_nF_n 上にあるための必要十分条件は、 $0 \leq u \leq 1$ を満たす実数 u が存在して

$$\overrightarrow{OP} = u\overrightarrow{OA_n} + (1-u)\overrightarrow{OF_n}$$

と表せることである。この式を変形すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= u\overrightarrow{OA_n} + (1-u)\overrightarrow{OF_n} \\ &= un\overrightarrow{OA_1} + (1-u)n\overrightarrow{OF_1} \\ &= un\vec{a} + (1-u)n(\vec{a} - \vec{b}) \\ &= n\vec{a} - (1-u)n\vec{b}\end{aligned}$$

となり、ここで $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに平行でなく $\vec{0}$ でないベクトルであるから、 $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と係数比較することで

$$\begin{cases} s = n \\ t = -(1-u)n \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。したがって、 $\textcircled{1}$ を満たすような実数 u ($0 \leq u \leq 1$) が存在するための条件は

$$\begin{cases} s = n \\ -n \leq t \leq 0 \end{cases}$$

を満たすことである。

$$(\text{答}) \quad s = n \quad \text{かつ} \quad -n \leq t \leq 0$$

(3)

点 B_3, C_7, E_2, P はそれぞれ第 1 象限、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限または x 軸上にあるから、これら 4 点が平行四辺形の頂点となるための必要十分条件は

$$\overrightarrow{B_3C_7} = \overrightarrow{PE_2}$$

を満たすことである。この式を変形すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_3C_7} &= \overrightarrow{PE_2} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OC_7} - \overrightarrow{OB_3} &= \overrightarrow{OE_2} - \overrightarrow{OP} \\ \Leftrightarrow 7(-\vec{a} + \vec{b}) - 3\vec{b} &= 2(-\vec{b}) - \overrightarrow{OP} \quad (\because \overrightarrow{OE_1} = -\vec{b}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} &= 7\vec{a} - 6\vec{b}\end{aligned}$$

となるから、(2)の結果より $n=7$ となる。逆に $s=7, t=-6$ のとき、(2)で求めた条件を満たす。

$$(\text{答}) \quad n=7, \overrightarrow{OP} = 7\vec{a} - 6\vec{b}$$