

〔1〕

(1)

$$f(x) = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + 3k - 5$$

である。 $f(x)$ は下に凸な2次関数であるから、 $f(x)=0$ が異なる2つの解をもつのは、 $f(x)$ の最小値が0未満のときである。これは、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}k^2 + 3k - 5 &< 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 12k + 20 &> 0 \\ \Leftrightarrow (k-2)(k-10) &> 0 \\ \therefore k < 2, 10 < k \end{aligned}$$

のときである。

(答) $k < 2, 10 < k$

(2)

条件をみたすのは、放物線 $y=f(x)$ の軸について $\frac{k}{2} < 2$ であり、かつ $f(2) \geq 0$ で、かつ方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの解をもつときである。したがって(1)の結果より、求める k の範囲は、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{k}{2} < 2 \\ f(2) \geq 0 \\ k < 2, 10 < k \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} k < 4 \\ 4 - 2k + 3k - 5 \geq 0 \\ k < 2, 10 < k \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} k < 4 \\ k \geq 1 \\ k < 2, 10 < k \end{cases} \\ \therefore &1 \leq k < 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $1 \leq k < 2$

(3)

軸の位置に着目して場合分けを行う。

[1] $\frac{k}{2} < 1 \Leftrightarrow k < 2$ のとき

定義域において $f(x)$ は単調増加するから、その最小値は

$$m(k) = f(1) = 2k - 4$$

である。

[2] $1 \leq \frac{k}{2} < 4 \Leftrightarrow 2 \leq k < 8$ のとき

放物線 $y=f(x)$ の頂点の x 座標が定義域内にあるから、その最小値は

$$\begin{aligned} m(k) &= f\left(\frac{k}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}k^2 + 3k - 5 \\ &= -\frac{1}{4}(k-6)^2 + 4 \end{aligned}$$

である。

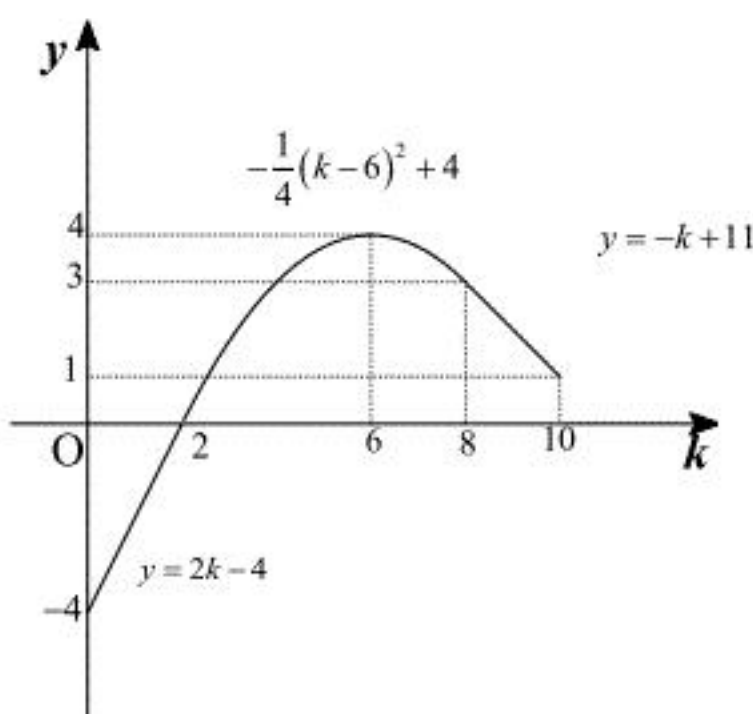
[3] $4 \leq \frac{k}{2} \Leftrightarrow 8 \leq k$ のとき

定義域において $f(x)$ は単調減少するから、その最小値は

$$m(k) = f(4) = -k + 11$$

である。

以上[1], [2], [3]より、 $0 \leq k \leq 10$ において $y=m(k)$ のグラフは以下の通りである。



上図より、 $m(k)$ は $k=6$ で最大値4を、 $k=0$ で最小値-4をとる。

(答) $\begin{cases} \text{最大値} & 4 \\ \text{最小値} & -4 \end{cases}$

〔2〕

(1)

第28群に入る項は $\frac{1}{28}, \frac{2}{28}, \dots, \frac{28}{28}$ であるから、その総和は

$$\begin{aligned}\frac{1}{28} + \frac{2}{28} + \dots + \frac{28}{28} &= \frac{1}{28} \sum_{k=1}^{28} k \\ &= \frac{1}{28} \cdot \frac{28 \cdot 29}{2} \\ &= \frac{29}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{29}{2}$

(2)

第 k 群には k 個の項が存在することから、 $n \geq 2$ のとき第 $n-1$ 群までの項の総数は、

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \text{ (個)}$$

である。第 n 群はその次の項から始まるから、第 n 群の最初の項は第 $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ 項である。これは、 $n=1$ でも成立する。

(答) 第 $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ 項

(3)

$$\frac{62 \cdot 63}{2} + 1 = 1954 < 2016$$

$$\frac{63 \cdot 64}{2} + 1 = 2017 > 2016$$

であるから、第2016項は第63群に含まれている。ここで、第62群までに含まれる項の数は

$$\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953 \text{ 個で、}$$

$$2016 - 1953 = 63$$

であるから、第2016項は第63群の第63番目である。これは、 $\frac{63}{63}$ である。

(答) $\frac{63}{63}$

【3】

(1)

この並び替えによって作られる整数全体の集合を U 、そのような整数のうち、2 の倍数の集合を A 、3 の倍数の集合を B 、5 の倍数の集合を C とおく。問の並び替えで作られる整数が 2 の倍数となるのは、一の位が 2, 4, 6 のいずれかのときである。これより、一の位から 1 桁ずつ考えれば、

$$n(A) = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 360$$

であることが分かる。また、問の並び替えで作られる整数が 3 の倍数となるのは、各桁の数の和が 3 の倍数であるときである。1, 2, 3, 4, 5, 6 から 5 つの数を選んだとき、その総和が 3 の倍数となるような選び方は、(1, 2, 3, 4, 5)、または (1, 2, 4, 5, 6) である。このとき、それぞれの選び方で、それらを並び替えて得られる整数は 5! 個存在するから、

$$n(B) = 2 \cdot 5! = 240$$

が成立する。

$$(\text{答}) \begin{cases} 2 \text{ の倍数} & 360 \text{ 個} \\ 3 \text{ の倍数} & 240 \text{ 個} \end{cases}$$

(2)

問の並び替えで作られる整数が 6 の倍数となるのは、2 の倍数であり、かつ 3 の倍数であるときである。まず、3 の倍数であるから、各桁の数の組み合わせは (1, 2, 3, 4, 5) または (1, 2, 4, 5, 6) でなくてはならない。

[1] 各桁の数の組み合わせが (1, 2, 3, 4, 5) であるとき

(1, 2, 3, 4, 5) を並び替えた数は、一の位が 2, 4 であるとき、6 の倍数となる。このような選び方は、一の位から 1 桁ずつ考えれば、

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 (\text{個})$$

であると分かる。

[2] 各桁の数の組み合わせが (1, 2, 4, 5, 6) であるとき

(1, 2, 4, 5, 6) を並び替えた数は、一の位が 2, 4, 6 であるとき、6 の倍数となる。このような選び方は、一の位から 1 桁ずつ考えれば、

$$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72 (\text{個})$$

であると分かる。

以上 [1], [2] より、

$$n(A \cap B) = 48 + 72 = 120 (\text{個})$$

である。

(答) 120 個

(3)

問の並び替えで作られる整数が 5 の倍数となるのは、一の位が 5 のときである。このような整数を考える。一万の位が 6 となるような整数は、1 桁ずつ考えれば、

$$1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 (\text{個})$$

存在すると分かる。同様に、一万の位が 4 となるような 5 の倍数は 24 個存在する。一の位が 5 で一万の位が 3 となるような整数のうち最も大きいものは 36425、その次に大きいものは 36415 であり、これが 50 番目に大きい整数である。

(答) 36415

(4)

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

であるから、問の並び替えで作られる、30 と互いに素である整数全体の集合は、 $\overline{A \cup B \cup C}$ である。問の並び替えで作られる整数で 5 の倍数である整数は、一の位が 5 であるものであるから、1 桁ずつ考えると、

$$n(C) = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

であると分かる。2 の倍数でありかつ 5 の倍数である整数は 10 の倍数であるが、このような整数は一の位が 0 であり、問の並び替えではこのような整数は作られないから、

$$n(A \cap C) = 0$$

である。また、これより、

$$n(A \cap B \cap C) = 0$$

であると分かる。また、(2) より、 $n(A \cap B) = 120$ である。ここで、3 の倍数であり、かつ 5 の倍数である整数を考える。まず、このような整数は 3 の倍数であるから、各桁の数の組み合わせが (1, 2, 3, 4, 5)、または (1, 2, 4, 5, 6) である。

[1] 各桁の数の組み合わせが (1, 2, 3, 4, 5) であるとき

(1, 2, 3, 4, 5) を並び替えて作られる整数は、一の位が 5 であるときに 5 の倍数となるから、そのような整数は、

$$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 (\text{個})$$

存在する。

[2] 各桁の数の組み合わせが (1, 2, 4, 5, 6) であるとき

(1, 2, 4, 5, 6) を並び替えて作られる整数は、一の位が 5 であるときに 5 の倍数となるから、同様にして、そのような整数は 24 個存在する。

以上 [1], [2] より、

$$n(B \cap C) = 48$$

である。また、1 桁ずつ考えると、

$$n(U) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$$

であると分かる。以上より、

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B \cup C}) &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \\ &= 720 - 360 - 240 - 120 + 120 + 0 + 48 - 0 \\ &= 168 \end{aligned}$$

であると分かる。

(答) 168 個

〔4〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 10x + 6 \\ &= 3\left(x - \frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{7}}{3}\right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減は以下の通りである。

x	0	...	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗

よって、 $f(x)$ の最小値は $f(0)$ または $f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)$ であるから、 $f(0), f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)$ がともに正であることを示せばよい。

$$\alpha = \frac{5+\sqrt{7}}{3}$$

とおくと、 α は $f'(x)=0$ の解であるから、

$$\begin{aligned} 3\alpha^2 - 10\alpha + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= \frac{10}{3}\alpha - 2 \end{aligned}$$

を満たす。これを用いると、

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 > 0 \\ f(\alpha) &= \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha + 1 \\ &= \alpha\left(\frac{10}{3}\alpha - 2\right) - 5\alpha^2 + 6\alpha + 1 \\ &= -\frac{5}{3}\alpha^2 + 4\alpha + 1 \\ &= -\frac{5}{3}\left(\frac{10}{3}\alpha - 2\right) + 4\alpha + 1 \\ &= -\frac{14}{9}\alpha + \frac{13}{3} \\ &= -\frac{14(5+\sqrt{7})}{27} + \frac{13}{3} \\ &= \frac{47-14\sqrt{7}}{27} \\ &= \frac{\sqrt{2209}-\sqrt{1372}}{27} > 0 \end{aligned}$$

である。したがって、 $x \geq 0$ のとき、 $f(x) > 0$ である。

(証明終)

(2)

$x \geq 0$ において $f(x) > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} (x^3 - 5x^2 + 6x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + x \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{1}{4}(4a^3 + 6a^2 + 4a + 1) - \frac{5}{3}(3a^2 + 3a + 1) + 3(2a + 1) + 1 \\ &= a^3 - \frac{7}{2}a^2 + 2a + \frac{31}{12} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} S'(a) &= 3a^2 - 7a + 2 \\ &= (3a-1)(a-2) \end{aligned}$$

であるから、 $S(a)$ の増減は以下の通りである。

a	0	...	$\frac{1}{3}$	...	2	...
$S'(a)$		+	0	-	0	+
$S(a)$		↗		↘		↗

よって、 $S(a)$ は $a=0$ または $a=2$ で最小となる。

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{31}{12} \\ S(2) &= 8 - 14 + 4 + \frac{31}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

であるから、 $a=2$ で $S(a)$ は最小値 $\frac{7}{12}$ をとる。

(答) 最小値: $\frac{7}{12}$, $a=2$