

〔1〕

(1)

実数 k が x に関する方程式 $4x^3 - (a+9)x - 2(a-2) = 0$ の解であるとき、

$$4k^3 - (a+9)k - 2(a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+2)a = 4k^3 - 9k + 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、 $\textcircled{1}$ に $k = -2$ を代入すると、(左辺) = 0, (右辺) = -10 となるから $k \neq -2$ である。よって、

$$a = \frac{4k^3 - 9k + 4}{k+2} = \frac{(2k-1)(2k^2+k-4)}{k+2}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{(2k-1)(2k^2+k-4)}{k+2}$$

(2)

(1)より、自然数 k が x に関する方程式 $4x^3 - (a+9)x - 2(a-2) = 0$ の解であるとき、

$$a = \frac{4k^3 - 9k + 4}{k+2} = 4k^2 - 8k + 7 - \frac{10}{k+2}$$

と表せる。 a, k は整数であるから $\frac{10}{k+2}$ も整数であり、それを満たす自然数 k は、

$$k = 3, 8$$

のみである。よって、求める a は

$$k = 3 \text{ のとき } 4 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 7 - \frac{10}{3+2} = 17$$

$$k = 8 \text{ のとき } 4 \cdot 8^2 - 8 \cdot 8 + 7 - \frac{10}{8+2} = 198$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = 17, 198$$

(3)

(1)より、整数ではない正の有理数 $\frac{n}{m}$ (m, n は互いに素である自然数で $m \neq 1$) が x に関する方程式 $4x^3 - (a+9)x - 2(a-2) = 0$ の解であるとき、

$$a = \frac{4\left(\frac{n}{m}\right)^3 - 9\frac{n}{m} + 4}{\frac{n}{m} + 2} = \frac{4n^3 - 9nm^2 + 4m^3}{nm^2 + 2m^3} = 2 + \frac{n(4n^2 - 11m^2)}{m^2(n+2m)}$$

と表せる。 a は整数であるから $\frac{n(4n^2 - 11m^2)}{m^2(n+2m)}$ も整数であるが、 m, n は互いに素である自然数だから、 $4n^2 - 11m^2$ は m^2 の倍数である。つまり、 $4n^2$ は m^2 の倍数であり、 m, n が互いに素であることと $m \neq 1$ であることから、 $m = 2$ である。このとき、

$$a = 2 + \frac{n(4n^2 - 11 \cdot 2^2)}{2^2(n+2 \cdot 2)} = n^2 - 4n + 7 - \frac{20}{n+4}$$

と表せる。 a は整数であるから $\frac{20}{n+4}$ も整数であり、この条件を満たし、かつ 2 と互いに素である自然数 n は、

$$n = 1$$

のみである。よって、求める a は

$$a = 1^2 - 4 \cdot 1 + 7 - \frac{20}{1+4} = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = 0$$

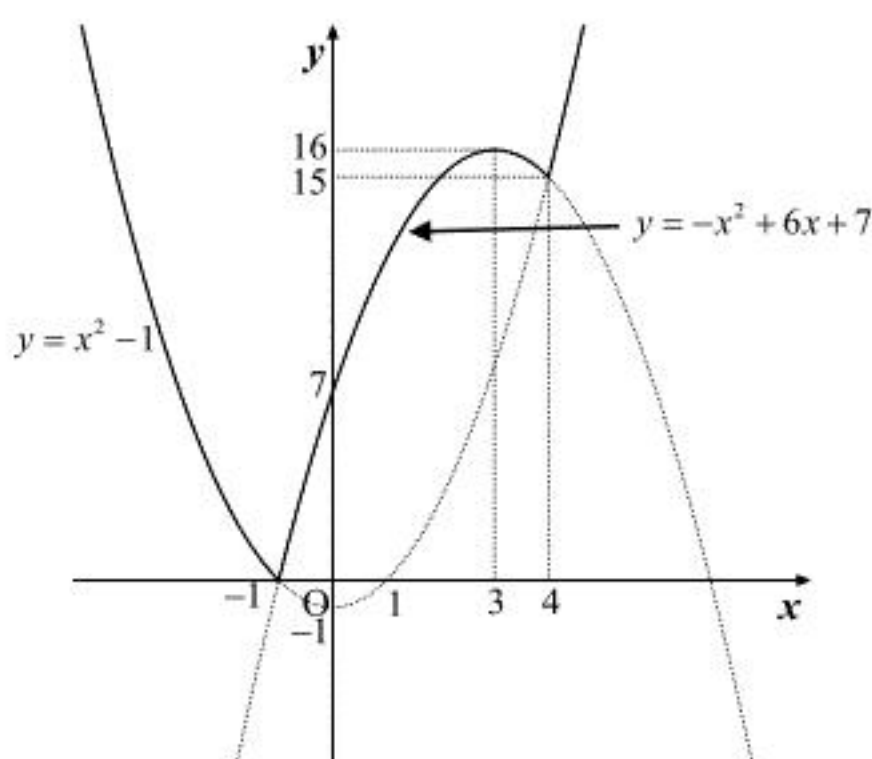
〔2〕

(1)

$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ は $x < -1, 4 < x$ で正となり, $-1 < x < 4$ で負となる。よって,

$$|x^2 - 3x - 4| + 3x + 3 = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq -1, 4 \leq x) \\ -x^2 + 6x + 7 & (-1 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

となる。 $-x^2 + 6x + 7 = -(x-3)^2 + 16$ であるから, C は以下のように図示できる。



(答) 前図

(2)

$-1 \leq x \leq 4$ において $|x^2 - 3x - 4| + 3x + 3 = -x^2 + 6x + 7$ であるから, $-1 \leq x \leq 4$ における C と

L の共有点の x 座標は, $-x^2 + 6x + 7 = a(x-4) + 15$ の解のうち $-1 \leq x \leq 4$ を満たす x である。

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x + 7 &= a(x-4) + 15 \\ \Leftrightarrow x^2 + (a-6)x - 4a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x - (2-a)\}(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

であるから, $-1 \leq 2-a \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 3$ のとき共有点の x 座標は $2-a, 4$ であり,

$2-a < -1, 4 < 2-a \Leftrightarrow a < -2, 3 < a$ のとき共有点の x 座標は 4 である。ただし, $a = -2$ のときは $2-a = 4$ である。

(答) $-2 < a \leq 3$ のとき $2-a, 4$
 $a \leq -2, 3 < a$ のとき 4

(3)

(2)と同様にして, $x \leq -1, 4 \leq x$ における C と L の共有点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= a(x-4) + 15 \\ \Leftrightarrow x^2 - ax + 4a - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x - (a-4)\}(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

の解のうち $x \leq -1, 4 \leq x$ を満たす x である。よって, $a-4 \leq -1, 4 \leq a-4 \Leftrightarrow a \leq 3, 8 \leq a$ のとき共有点の x 座標は $a-4, 4$ であり, $-1 < a-4 < 4 \Leftrightarrow 3 < a < 8$ のとき共有点の x 座標は 4 である。ただし, $a = 8$ のときは $a-4 = 4$ である。また, $a = 3$ のときは $2-a = a-4 = -1$ である。以上より, (2)の結果と合わせて, C と L の共有点の x 座標は,

$$\begin{cases} a-4, 4 & (a \leq -2, 8 < a \text{ のとき}) \\ 2-a, a-4, 4 & (-2 < a < 3 \text{ のとき}) \\ -1, 4 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 4 & (3 < a \leq 8 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答) $3 < a \leq 8$ のとき 1個
 $a \leq -2, a = 3, 8 < a$ のとき 2個
 $-2 < a < 3$ のとき 3個

[3]

(1)

$$\overrightarrow{ST} = (1, 0, t-s), \overrightarrow{SU} = (0, 1, u-s)$$

であるから、点Pは平面 α 上にあるから、実数 k, l を用いて、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + k\overrightarrow{ST} + l\overrightarrow{SU} = (k, l, (1-k-l)s + kt + lu)$$

と表せる。また、点Pは直線BF上にあるから、 $k=l=1$ である。よって、

$$\overrightarrow{OP} = (1, 1, -s+t+u)$$

となる。

(答) $P(1, 1, -s+t+u)$

(2)

まず、点S, T, Uがそれぞれ辺OD, AE, CD上にあることより

$$\begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、平面 α による立方体OABC-DEFGの切り口が四角形となるための条件は、点Pは辺BF上にあること、つまり

$$0 \leq -s+t+u \leq 1$$

となることである。ここで、

$$\overrightarrow{UP} = (1, 0, t-s) = \overrightarrow{ST}$$

となり、四角形STPUは平行四辺形である。よって、四角形STPUがひし形となるための条件は、

$$ST = SU$$

$$\Leftrightarrow ST^2 = SU^2$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + (t-s)^2 = 1^2 + (s-u)^2$$

$$\Leftrightarrow |s-t| = |s-u|$$

$$\Leftrightarrow s-t = s-u \text{ または } s-t = u-s$$

$$\Leftrightarrow t = u \text{ または } s = \frac{t+u}{2}$$

となることである。 $t=u$ のとき

$$0 \leq -s+t+u \leq 1 \Leftrightarrow \frac{s}{2} \leq t=u \leq \frac{1+s}{2}$$

となる。また、 $s = \frac{t+u}{2}$ のとき

$$0 \leq -s+t+u \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t+u \leq 2$$

となるが、 $\textcircled{1}$ よりこれは常に満たされる。よって求める条件は、 $\frac{s}{2} \leq t=u \leq \frac{1+s}{2}$ または

$s = \frac{t+u}{2}$ となることである。

(答) $\frac{s}{2} \leq t=u \leq \frac{1+s}{2}$ または $s = \frac{t+u}{2}$

[4]

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 - (2a-1)x^2 - (a+4)x + 2a+3 \\ &= (x^3 - 2x^2 - x + 2)a + x^2 - 4x + 3 \\ &= (x+1)(x-1)(x-2)a + (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

と変形できるから、 $f(-1)=8$, $f(1)=0$, $f(2)=-1$ は a の値によらない。よって、曲線 $C: y=f(x)$ は a の値によらず

$$(-1, 8), (1, 0), (2, -1)$$

の3点を通る。 $x_1 < x_2 < x_3$ であることより、 $P(-1, 8)$, $Q(1, 0)$, $R(2, -1)$ である。

(答) $P(-1, 8)$, $Q(1, 0)$, $R(2, -1)$

(2)

$f(x)$ が極値を持つ条件は、

$$f'(x) = 3ax^2 - 2(2a-1)x - (a+4)$$

が符号を変える点をもつことである。 $a=0$ のとき、

$$f'(x) = 2x - 4$$

となり、これは $x=2$ で符号を変える。つまり極値をもつ。 $a \neq 0$ のとき、 $f'(x)$ は2次関数となるから、これが符号を変える点をもつ条件は $f'(x)=0$ の判別式を D として $D > 0$ となることである。

$$\frac{D}{4} = (2a-1)^2 + 3a(a+4) = 7a^2 + 8a + 1 = (7a+1)(a+1)$$

であるから、 $a \neq 0$ のとき $f(x)$ が極値を持つ条件は、

$$D > 0 \Leftrightarrow a < -1, -\frac{1}{7} < a < 0, 0 < a$$

である。以上より、求める a の範囲は

$$a < -1, -\frac{1}{7} < a$$

となる。

(答) $a < -1, -\frac{1}{7} < a$

(3)

$a=1$ のとき、

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5 = (x+\sqrt{5})(x-1)(x-\sqrt{5})$$

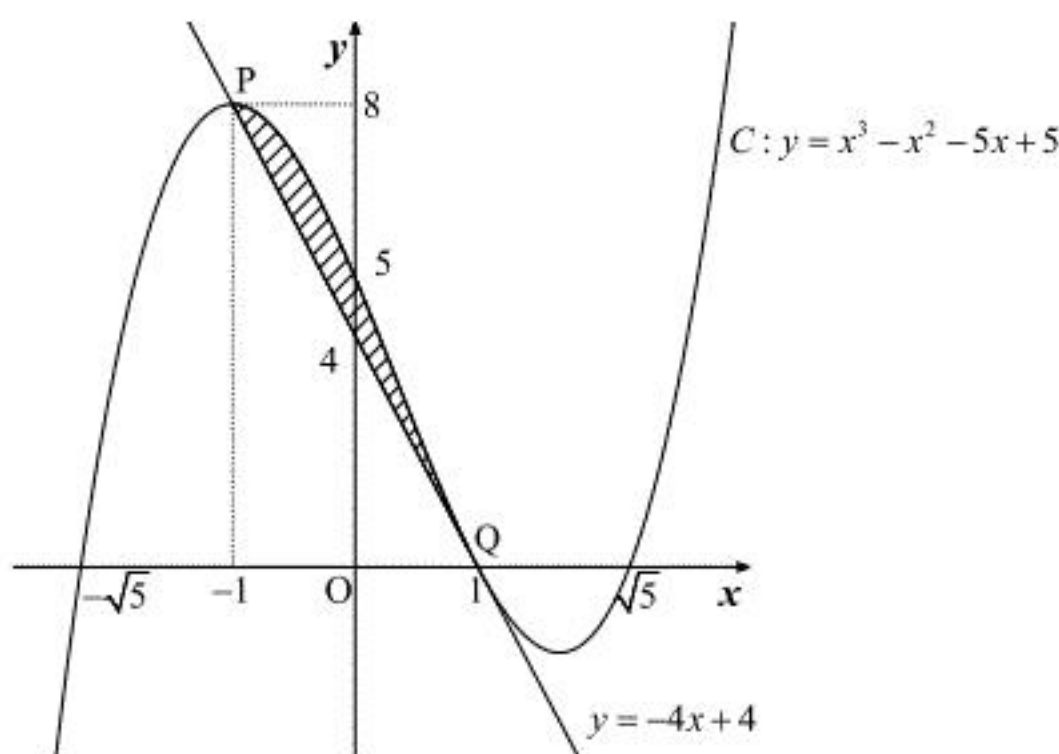
である。また、直線PQの式は $P(-1, 8)$, $Q(1, 0)$ であることから、

$$y = \frac{0-8}{1-(-1)}(x-1) \Leftrightarrow y = -4x+4$$

である。直線PQと曲線Cの式から y を消去して交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 5x + 5 &= -4x + 4 \\ \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \pm 1 \end{aligned}$$

となる。よって、下図の斜線部の面積を求めればよい。



以上より、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{(x^3 - x^2 - 5x + 5) - (-4x + 4)\} dx &= \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \left\{ \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - (0 + 0) \right\} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{4}{3}$