

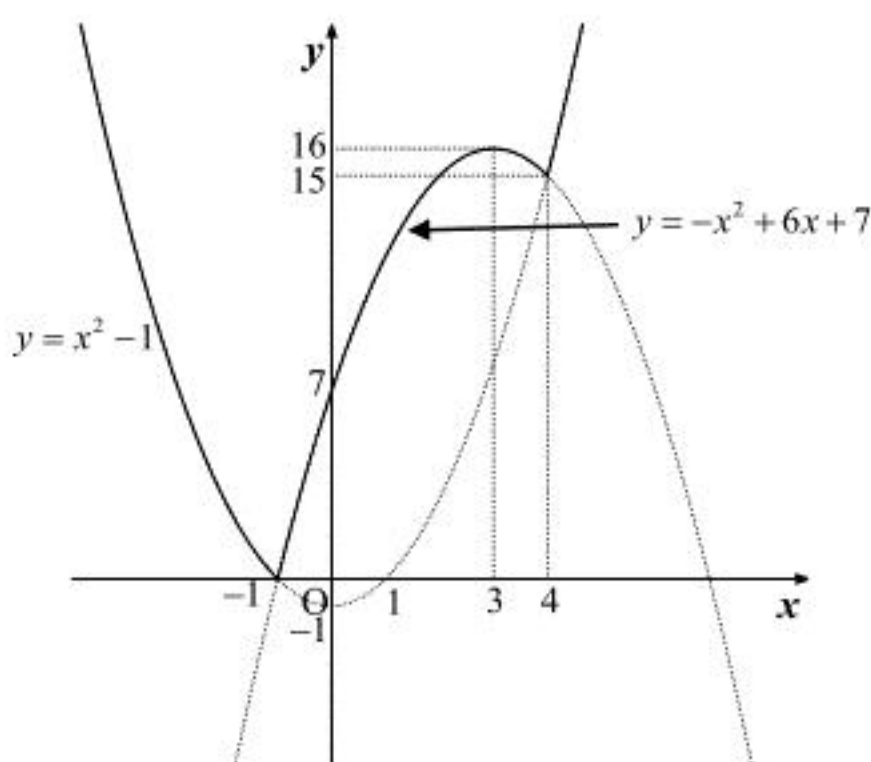
# [1]

(1)

$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$  は  $x < -1, 4 < x$  で正となり,  $-1 < x < 4$  で負となる。よって,

$$|x^2 - 3x - 4| + 3x + 3 = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq -1, 4 \leq x) \\ -x^2 + 6x + 7 & (-1 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

となる。 $-x^2 + 6x + 7 = -(x-3)^2 + 16$  であるから,  $C$  は以下のように図示できる。



(答) 前図

(2)

$-1 \leq x \leq 4$  において  $|x^2 - 3x - 4| + 3x + 3 = -x^2 + 6x + 7$  であるから,  $-1 \leq x \leq 4$  における  $C$  と

$L$  の共有点の  $x$  座標は,  $-x^2 + 6x + 7 = a(x-4) + 15$  の解のうち  $-1 \leq x \leq 4$  を満たす  $x$  である。

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x + 7 &= a(x-4) + 15 \\ \Leftrightarrow x^2 + (a-6)x - 4a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x - (2-a)\}(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

であるから,  $-1 \leq 2-a \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 3$  のとき共有点の  $x$  座標は  $2-a, 4$  であり,

$2-a < -1, 4 < 2-a \Leftrightarrow a < -2, 3 < a$  のとき共有点の  $x$  座標は  $4$  である。ただし,  $a = -2$  のときは  $2-a = 4$  である。

(答)  $-2 < a \leq 3$  のとき  $2-a, 4$   
 $a \leq -2, 3 < a$  のとき  $4$

(3)

(2)と同様にして,  $x \leq -1, 4 \leq x$  における  $C$  と  $L$  の共有点の  $x$  座標は,

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= a(x-4) + 15 \\ \Leftrightarrow x^2 - ax + 4a - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x - (a-4)\}(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

の解のうち  $x \leq -1, 4 \leq x$  を満たす  $x$  である。よって,  $a-4 \leq -1, 4 \leq a-4 \Leftrightarrow a \leq 3, 8 \leq a$  のとき共有点の  $x$  座標は  $a-4, 4$  であり,  $-1 < a-4 < 4 \Leftrightarrow 3 < a < 8$  のとき共有点の  $x$  座標は  $4$  である。ただし,  $a = 8$  のときは  $a-4 = 4$  である。また,  $a = 3$  のときは  $2-a = a-4 = -1$  である。以上より, (2)の結果と合わせて,  $C$  と  $L$  の共有点の  $x$  座標は,

$$\begin{cases} a-4, 4 & (a \leq -2, 8 < a \text{ のとき}) \\ 2-a, a-4, 4 & (-2 < a < 3 \text{ のとき}) \\ -1, 4 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 4 & (3 < a \leq 8 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答)  $3 < a \leq 8$  のとき 1個  
 $a \leq -2, a = 3, 8 < a$  のとき 2個  
 $-2 < a < 3$  のとき 3個

## [2]

(1)

$$\overrightarrow{ST} = (1, 0, t-s), \overrightarrow{SU} = (0, 1, u-s)$$

であるから、点Pは平面 $\alpha$ 上にあるから、実数 $k, l$ を用いて、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + k\overrightarrow{ST} + l\overrightarrow{SU} = (k, l, (1-k-l)s + kt + lu)$$

と表せる。また、点Pは直線BF上にあるから、 $k=l=1$ である。よって、

$$\overrightarrow{OP} = (1, 1, -s+t+u)$$

となる。

(答)  $P(1, 1, -s+t+u)$

(2)

まず、点S, T, Uがそれぞれ辺OD, AE, CD上にあることより

$$\begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、平面 $\alpha$ による立方体OABC-DEFGの切り口が四角形となるための条件は、点Pは辺BF上にあること、つまり

$$0 \leq -s+t+u \leq 1$$

となることである。ここで、

$$\overrightarrow{UP} = (1, 0, t-s) = \overrightarrow{ST}$$

となり、四角形STPUは平行四辺形である。よって、四角形STPUがひし形となるための条件は、

$$ST = SU$$

$$\Leftrightarrow ST^2 = SU^2$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + (t-s)^2 = 1^2 + (s-u)^2$$

$$\Leftrightarrow |s-t| = |s-u|$$

$$\Leftrightarrow s-t = s-u \text{ または } s-t = u-s$$

$$\Leftrightarrow t = u \text{ または } s = \frac{t+u}{2}$$

となることである。 $t=u$ のとき

$$0 \leq -s+t+u \leq 1 \Leftrightarrow \frac{s}{2} \leq t=u \leq \frac{1+s}{2}$$

となる。また、 $s = \frac{t+u}{2}$ のとき

$$0 \leq -s+t+u \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t+u \leq 2$$

となるが、 $\textcircled{1}$ よりこれは常に満たされる。よって求める条件は、 $\frac{s}{2} \leq t=u \leq \frac{1+s}{2}$  または

$s = \frac{t+u}{2}$  となることである。

(答)  $\frac{s}{2} \leq t=u \leq \frac{1+s}{2}$  または  $s = \frac{t+u}{2}$

### 【3】【A】

(1)

2進法で表された4桁の数 $abcd_{(2)}$ のうち、 $a=d\neq 0, b=c$ となるものは、

$$1bbl_{(2)}(bは0,1のいずれかである。)$$

である。これを10進法で表すと

$$\begin{aligned} 1bbl_{(2)} &= 1 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + b \cdot 2^1 + a \cdot 2^0 \\ &= 6b + 9 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$b=0のとき6 \cdot 0 + 9 = 9$$

$$b=1のとき6 \cdot 1 + 9 = 15$$

となる。

(答) 9, 15

(2)

3進法で表された4桁の数 $abcd_{(3)}$ のうち、 $a=d\neq 0, b=c$ となるものは、

$$abba_{(3)}(aは1,2のいずれかであり、bは0,1,2のいずれかである。)$$

である。これを10進法で表すと

$$\begin{aligned} abba_{(3)} &= a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + b \cdot 3^1 + a \cdot 3^0 \\ &= 28a + 12b \end{aligned}$$

となる。よって、

$$(a,b)=(1,0)のとき28 \cdot 1 + 12 \cdot 0 = 28$$

$$(a,b)=(1,1)のとき28 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 40$$

$$(a,b)=(1,2)のとき28 \cdot 1 + 12 \cdot 2 = 52$$

$$(a,b)=(2,0)のとき28 \cdot 2 + 12 \cdot 0 = 56$$

$$(a,b)=(2,1)のとき28 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 68$$

$$(a,b)=(2,2)のとき28 \cdot 2 + 12 \cdot 2 = 80$$

となる。

(答) 28, 40, 52, 56, 68, 80

(3)

9進法で表された4桁の数 $abcd_{(9)}$ のうち、 $a=d\neq 0, b=c$ となるものは、

$$abba_{(9)}(aは1,2,\dots,8のいずれかであり、bは0,1,\dots,8のいずれかである。)$$

であるから、その個数は、

$$8 \cdot 9 = 72(\text{個})$$

である。

(答) 72 個

(4)

4進法で表された4桁の数 $abcd_{(4)}$ のうち、 $a=d\neq 0, b=c$ となるものは、

$$abba_{(4)}(aは1,2,3のいずれかであり、bは0,1,2,3のいずれかである。)$$

である。これを10進法で表すと、

$$abba_{(4)} = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + b \cdot 4^1 + a \cdot 4^0 = 65a + 20b = 5(13a + 4b)$$

となる。 $13a+4b$ は自然数であるから、 $abba_{(4)}$ は $a, b$ の値によらず5で割り切れる。また、

$a=1, b=0$ のとき $13a+4b=13$ であり、 $a=1, b=1$ のとき $13a+4b=17$ であるが、13と17は互

いに素である。よって、全ての $(a, b)$ の組に対応する $13a+4b$ の最大公約数を求めると1とな

る。以上より求める最大公約数は5である。

(答) 5

(5)

$n$ 進法で表された4桁の数 $abcd_{(n)}$ のうち、 $a=d\neq 0, b=c$ となるものは、

$$abba_{(n)}(aは1,2,\dots,n-1のいずれかであり、bは0,1,\dots,n-1のいずれかである。)$$

である。これを10進法で表すと、

$$abba_{(n)} = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + b \cdot n^1 + a \cdot n^0 = (n^3 + 1)a + (n^2 + n)b = (n+1)\{(n^2 - n + 1)a + nb\}$$

となる。 $(n^2 - n + 1)a + nb$ は整数であるから、 $abba_{(n)}$ は $a, b$ の値によらず $n+1$ で割り切れる。

(証明終)

### 【3】【B】

(1)

$m=4, n=4$ のとき、1回も当たりが出ない確率は、

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$$

である。よって、少なくとも1回あたりが出る確率は

$$1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256}$$

である。

(答)  $\frac{175}{256}$

(2)

$m=10, n=100$ のとき $p=\frac{1}{10}$ であるから、 $X$ は近似的に正規分布 $N\left(100 \cdot \frac{1}{10}, 100 \cdot \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right)\right)$

つまり $N(10, 9)$ に従う。よって、標準正規分布に従う確率変数を $Z$ とすると

$$P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10-10}{3}\right) = P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$$

である。

(答)  $P(X \geq 10) = \frac{1}{2}$

(3)

$m=10, n=100$ のとき、 $X$ は二項分布 $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$ に従う。よって、標準正規分布に従う確率変

数を $Z$ として、

$$P(X \geq 10) \asymp P\left(Z \geq \frac{10 - 0.5 - 100 \cdot \frac{1}{10}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right)}}\right) = P\left(Z \geq -\frac{1}{6}\right)$$

と近似できる。 $P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{6}\right) = 0.066$ であるから、

$$P(X \geq 10) = 0.066 + 0.5 = 0.566$$

となる。

(答)  $P(X \geq 10) = 0.566$

# [4] 【C】

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 - (2a-1)x^2 - (a+4)x + 2a+3 \\ &= (x^3 - 2x^2 - x + 2)a + x^2 - 4x + 3 \\ &= (x+1)(x-1)(x-2)a + (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

と変形できるから、 $f(-1)=8, f(1)=0, f(2)=-1$ は $a$ の値によらない。よって、曲線  $C: y=f(x)$  は $a$ の値によらず

$$(-1, 8), (1, 0), (2, -1)$$

の3点を通る。 $x_1 < x_2 < x_3$ であることより、 $P(-1, 8), Q(1, 0), R(2, -1)$ である。

(答)  $P(-1, 8), Q(1, 0), R(2, -1)$

(2)

$f(x)$ が極値を持つ条件は、

$$f'(x) = 3ax^2 - 2(2a-1)x - (a+4)$$

が符号を変える点をもつことである。 $a=0$ のとき、

$$f'(x) = 2x - 4$$

となり、これは $x=2$ で符号を変える。つまり極値をもつ。 $a \neq 0$ のとき、 $f'(x)$ は2次関数となるから、これが符号を変える点をもつ条件は $f'(x)=0$ の判別式を $D$ として $D > 0$ となることである。

$$\frac{D}{4} = (2a-1)^2 + 3a(a+4) = 7a^2 + 8a + 1 = (7a+1)(a+1)$$

であるから、 $a \neq 0$ のとき $f(x)$ が極値を持つ条件は、

$$D > 0 \Leftrightarrow a < -1, -\frac{1}{7} < a < 0, 0 < a$$

である。以上より、求める $a$ の範囲は

$$a < -1, -\frac{1}{7} < a$$

となる。

(答)  $a < -1, -\frac{1}{7} < a$

(3)

$a=1$ のとき、

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5 = (x+\sqrt{5})(x-1)(x-\sqrt{5})$$

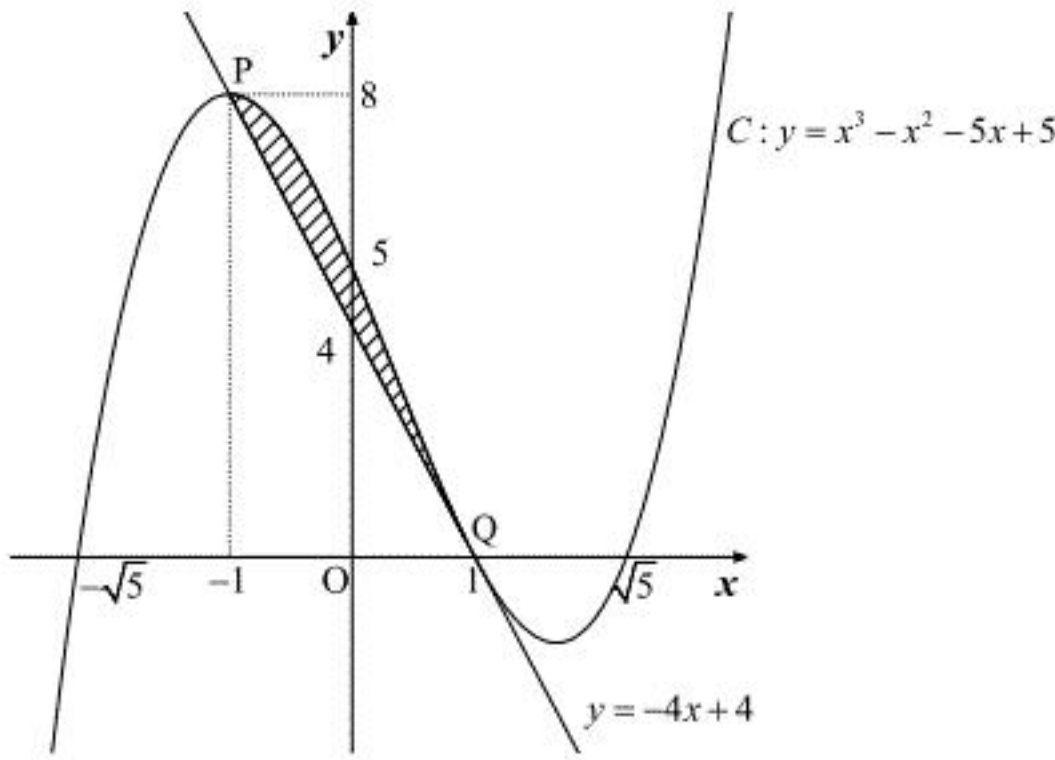
である。また、直線PQの式は $P(-1, 8), Q(1, 0)$ であることから、

$$y = \frac{0-8}{1-(-1)}(x-1) \Leftrightarrow y = -4x+4$$

である。直線PQと曲線Cの式から $y$ を消去して交点の $x$ 座標を求めると、

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 5x + 5 &= -4x + 4 \\ \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \pm 1 \end{aligned}$$

となる。よって、下図の斜線部の面積を求めればよい。



以上より、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{ (x^3 - x^2 - 5x + 5) - (-4x + 4) \} dx &= \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \left\{ \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) - (0 + 0) \right\} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{4}{3}$

# [4] 【D】

(1)

$\int_0^1 t f(t) dt$ は定数であるから、これを $C_1$ とおく。このとき、

$$f(x) = e^x - C_1$$

とかけるから、

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^1 t (e^t - C_1) dt \\ &= \int_0^1 t (e^t)' dt - \int_0^1 C_1 t dt \\ &= [te^t]_0^1 + \int_0^1 (-e^t - C_1 t) dt \\ &= (e - 0) + \left[ -e^t - \frac{C_1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= e + \left\{ \left( -e - \frac{C_1}{2} \right) - (-1 - 0) \right\} \\ &= 1 - \frac{C_1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $C_1 = \frac{2}{3}$ となるから、 $f(x) = e^x - \frac{2}{3}$ である。

(答)  $f(x) = e^x - \frac{2}{3}$

(2)

$\int_0^1 t \{g(t)\}^2 dt$ は定数であるから、これを $C_2$ とおく。このとき、

$$g(x) = e^x - C_2$$

とかけるから、

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_0^1 t (e^t - C_2)^2 dt \\ &= \int_0^1 t (e^{2t} - 2C_2 e^t + C_2^2) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2} t e^{2t} - 2C_2 t e^t \right]_0^1 + \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} e^{2t} + 2C_2 e^t + C_2^2 t \right) dt \\ &= \left\{ \left( \frac{1}{2} e^2 - 2C_2 e \right) - (0 - 0) \right\} + \left[ -\frac{1}{4} e^{2t} + 2C_2 e^t + \frac{C_2^2}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e^2 - 2C_2 e + \left\{ \left( -\frac{1}{4} e^2 + 2C_2 e + \frac{C_2^2}{2} \right) - \left( -\frac{1}{4} + 2C_2 + 0 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} e^2 + \frac{C_2^2}{2} - 2C_2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$C_2 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{C_2^2}{2} - 2C_2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow C_2^2 - 6C_2 + \frac{e^2 + 1}{2} = 0$$

となる。この $C_2$ に関する2次方程式の判別式を $D$ とすると、

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 1 \cdot \frac{e^2 + 1}{2} = \frac{17 - e^2}{2} > 0 \quad (\because 2 < e < 3)$$

であり、

$$C_2 = \frac{6 \pm \sqrt{34 - 2e^2}}{2}$$

となるから、 $g(x) = e^x - \frac{6 \pm \sqrt{34 - 2e^2}}{2}$ である。

(答)  $g(x) = e^x - \frac{6 \pm \sqrt{34 - 2e^2}}{2}$