

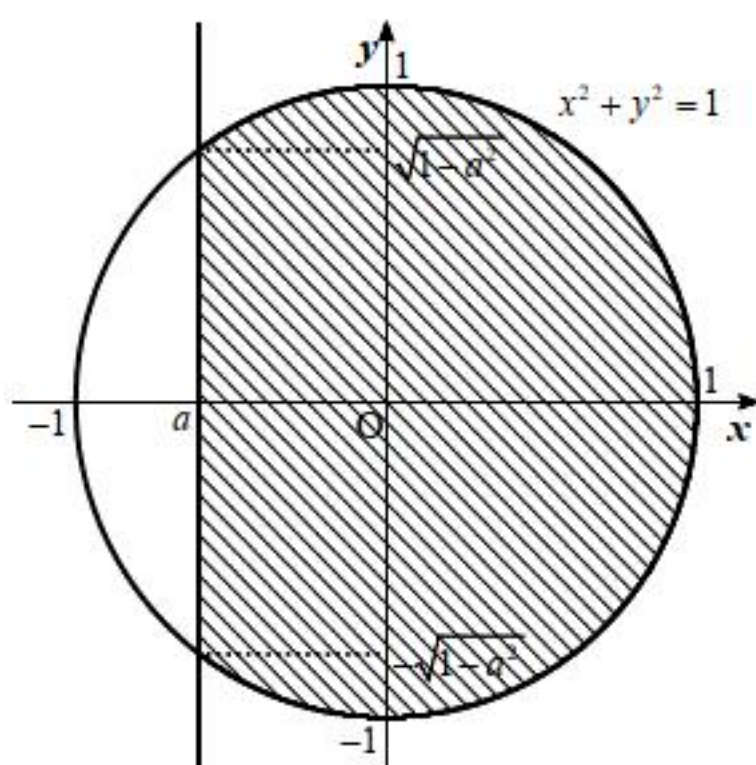
【1】

(1)

座標平面上の点 (x, y) が $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq a$ を満たすとき、点 (x, y) が動く領域を D とおく。

[1] $-1 < a < 0$ のとき

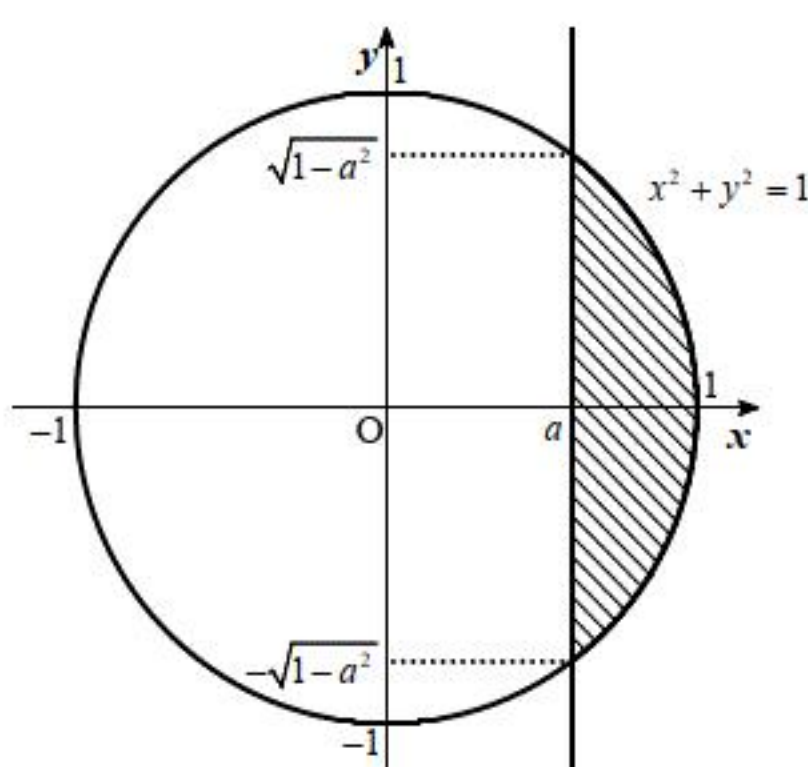
D を図示すると下図の斜線部ようになる。



この図より、 y の最大値は1である。

[2] $0 \leq a < 1$ のとき

D を図示すると下図の斜線部ようになる。



この図より、 y の最大値は $\sqrt{1-a^2}$ である。

以上[1], [2]より、 $-1 < a < 0$ のとき最大値は1, $0 \leq a < 1$ のとき最大値は $\sqrt{1-a^2}$ である。

(答) $-1 < a < 0$ のとき 1
 $0 \leq a < 1$ のとき $\sqrt{1-a^2}$

(2)

$y - x = k$ とおくと、 $y = x + k$ となる。ゆえに、座標平面上において、直線 $y = x + k$ が D と共有点を持つような k の最大値が $y - x$ の最大値である。ここで、直線 $y = x + k$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と第2象限で接するときを考える。2式を連立して

$$x^2 + (x+k)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2kx + k^2 - 1 = 0$$

が得られる。直線 $y = x + k$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と第2象限で接する条件は、この2次方程式が重解を持ち、重解が $x < 0$ を満たすことである。ゆえに、判別式を D_c とすると、この条件は

$$\begin{cases} \frac{D_c}{4} = 0 \\ -\frac{2k}{2 \cdot 2} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 2(k^2 - 1) = 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

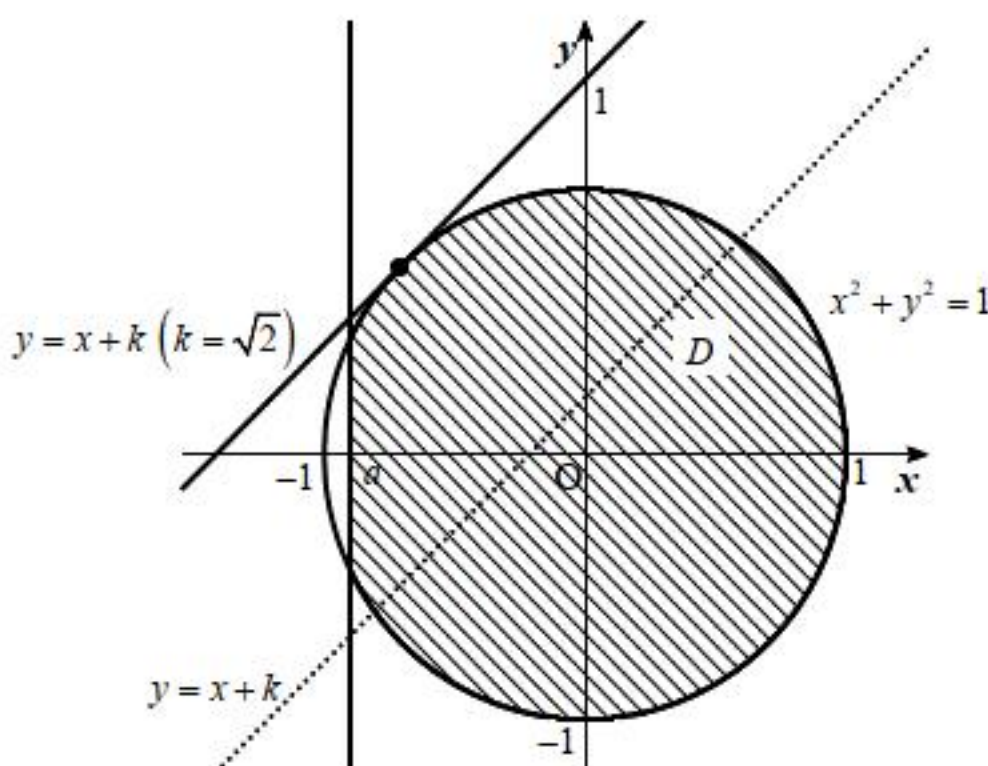
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = 2 \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\therefore k = \sqrt{2}$$

である。また、このときの接点の x 座標は $-\frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、 y 座標は $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。直線 $y = x + k$ と D の共有点を a の値で場合分けして考える。

[1] $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

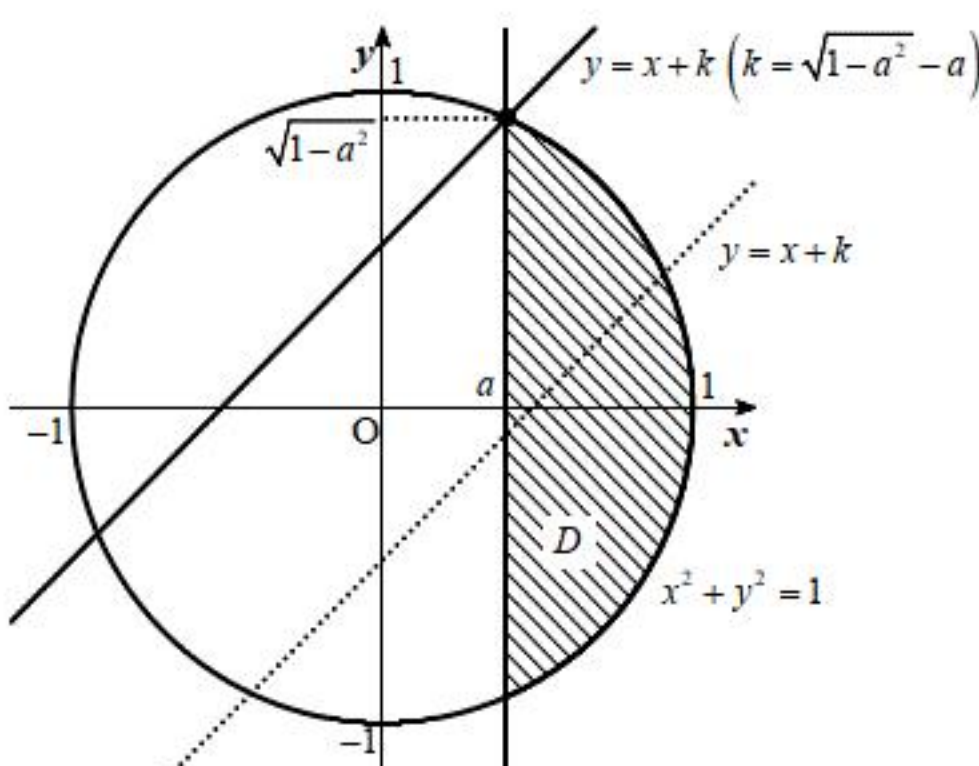
直線 $y = x + k$ と D を図示すると下図のようになる。



この図より、直線 $y = x + k$ が D と共有点を持つような k が最大となるのは、直線 $y = x + k$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と第2象限で接するときであり、最大値は $\sqrt{2}$ である。

[2] $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ のとき

直線 $y = x + k$ と D を図示すると下図のようになる。



この図より、直線 $y = x + k$ が D と共有点を持つような k が最大となるのは、直線 $y = x + k$ が点 $(a, \sqrt{1-a^2})$ を通るときであり、最大値は $\sqrt{1-a^2} - a$ である。

以上[1], [2]より、 $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値は $\sqrt{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ のとき最大値は $\sqrt{1-a^2} - a$ である。

(答) $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $\sqrt{2}$
 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ のとき $\sqrt{1-a^2} - a$

〔2〕

(1)

条件より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = a - 3(n-1)$ である。ここで

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a - 3(n-1)\} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となることを、 n に関する数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ &= a \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \{2a - 3(1-1)\} \end{aligned}$$

より、 $\textcircled{1}$ が成立する。

[2] $n=k$ (k は正の整数)のとき、 $\textcircled{1}$ が成立すると仮定すると、

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= \frac{1}{2}k\{2a - 3(k-1)\} + a - 3\{(k+1)-1\} \\ &= ka - \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + a - 3k \\ &= (k+1)a - \frac{3}{2}k(k+1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)[2a - 3\{(k+1)-1\}] \end{aligned}$$

より、 $n=k+1$ でも $\textcircled{1}$ が成立する。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n に対して、 $\textcircled{1}$ が成立する。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \{n - (k-1)\} \{a - 3(k-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{an - (3n+a)(k-1) + 3(k-1)^2\} \\ &= an^2 - (3n+a)\frac{1}{2}n(n-1) + 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} \\ &= an^2 - \frac{1}{2}n(n-1)\{3n+a-(2n-1)\} \\ &= \frac{1}{2}n\{2an - (n-1)(n+a+1)\} \\ &= \frac{1}{2}n\{-n^2 + an + (a+1)\} \\ &= -\frac{1}{2}n\{n - (a+1)\}(n+1) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad T_n = -\frac{1}{2}n\{n - (a+1)\}(n+1)$$

(3)

$$\begin{aligned} S_n &< 0 \\ \Leftrightarrow 2a - 3(n-1) &< 0 \quad (\because n > 0) \\ \Leftrightarrow n &> \frac{2}{3}a + 1 \quad \cdots \textcircled{2} \\ T_n &\geq 0 \\ \Leftrightarrow n - (a+1) &\leq 0 \quad \left(\because -\frac{1}{2}n(n+1) < 0 \right) \\ \Leftrightarrow n &\leq a+1 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\textcircled{2}$ かつ $\textcircled{3}$ を満たす自然数 n が30個であるとき、 $\textcircled{3}$ より、その30個の自然数は、 $a-28, a-27, \dots, a+1$ となる。ゆえに、 a が満たすべき条件は $\textcircled{2}$ より、

$$a-29 \leq \frac{2}{3}a+1 < a-28$$

$$\Leftrightarrow 29 < \frac{a}{3} \leq 30$$

$$\Leftrightarrow 87 < a \leq 90$$

である。これを満たす自然数 a は、 $a=88, 89, 90$ である。

(答) $a=88, 89, 90$

[3]

(1)

白玉、青玉の数をそれぞれ w, b (w, b は $b \geq 0, w \geq 0, w+b \leq 25$ を満たす整数) とおくと、赤玉の数は $25-w-b$ である。条件より、

$$\frac{{}_w C_1 \cdot {}_b C_1}{{}_{25} C_2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow wb = 50 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{{}_b C_1 \cdot {}_{25-w-b} C_1}{{}_{25} C_2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow b(25-w-b) = 50 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。②より、 $-b^2 - wb + 25b = 50$ を得るので、①を代入して、

$$\begin{aligned} -b^2 - 50 + 25b &= 50 \\ \Leftrightarrow b^2 - 25b + 100 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b-5)(b-20) &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 5, 20 \end{aligned}$$

を得る。 $b=5$ のとき、①より $w=10$ であり、これは条件を満たす。 $b=20$ のとき、①より

$w = \frac{5}{2}$ となるが、これは w が整数であることに反し、不適である。以上より、条件を満たす

のは $b=5, w=10$ のみで、このとき、白玉10個、青玉5個、赤玉10個である。

(答) 白玉10個、青玉5個、赤玉10個

(2)

白玉、青玉、赤球を1個ずつ取り出すから、求める確率は、

$$\frac{{}_{10} C_1 \cdot {}_5 C_1 \cdot {}_{10} C_1}{{}_{25} C_3} = \frac{5}{23}$$

である。

(答) $\frac{5}{23}$

(3)

取り出した4個の球がすべての色を含むとき、3色の球のうち、ある色の球は2個取り出され、あとの2色の球は1個ずつ取り出される。取り出した4個の球がすべての色を含んで、2個取り出される玉の色が白である確率を p_W 、青である確率を p_B 、赤である確率を p_R とおくと、

$$p_W = \frac{{}_{10} C_2 \cdot {}_5 C_1 \cdot {}_{10} C_1}{{}_{25} C_4} = \frac{9}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5 \cdot 10}{{}_{25} C_4}$$

$$p_B = \frac{{}_{10} C_1 \cdot {}_5 C_2 \cdot {}_{10} C_1}{{}_{25} C_4} = 2 \cdot \frac{10 \cdot 5 \cdot 10}{{}_{25} C_4}$$

$$p_R = \frac{{}_{10} C_1 \cdot {}_5 C_1 \cdot {}_{10} C_2}{{}_{25} C_4} = \frac{9}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5 \cdot 10}{{}_{25} C_4}$$

となる。求める条件付き確率は、

$$\frac{p_B}{p_W + p_B + p_R} = \frac{2}{\frac{9}{2} + 2 + \frac{9}{2}} = \frac{2}{11}$$

である。

(答) $\frac{2}{11}$

〔4〕

(1)

$$8 = \alpha\beta\gamma \geq \alpha^3 (\because \alpha \leq \beta \leq \gamma)$$

であるから、 $\alpha \leq 2$ である。 α は自然数であるから、 $\alpha = 1, 2$ となる。 $\alpha = 1$ のとき、 $\beta\gamma = 8$ なので、 $\beta \leq \gamma$ に注意すると、 $(\beta, \gamma) = (1, 8), (2, 4)$ である。同様にして、 $\alpha = 2$ のとき、 $(\beta, \gamma) = (2, 2)$ である。以上より、 $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 8), (1, 2, 4), (2, 2, 2)$ となる。

$$(\text{答}) (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 8), (1, 2, 4), (2, 2, 2)$$

(2)

解と係数の関係より、 $f(x) = 0$ の3解の積は8になる。ゆえに、 $f(x) = 0$ の3解の組として考えられるものは、(1)で求めた (α, β, γ) の組に一致する。いま、解と係数の関係より、

$$a = \alpha + \beta + \gamma$$

$$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であるから、(1)で求めた (α, β, γ) の各組に対し、 a, b の値を計算すると、

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 8) \text{ のとき, } a = 10, b = 17$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 4) \text{ のとき, } a = 7, b = 14$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 2, 2) \text{ のとき, } a = 6, b = 12$$

となる。したがって、 $(a_1, b_1) = (10, 17), (a_2, b_2) = (7, 14)$ である。

$$(\text{答}) (a_1, b_1) = (10, 17), (a_2, b_2) = (7, 14)$$

(3)

$$f_1(x) = x^3 - 10x^2 + 17x - 8$$

$$f_2(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

より、 $f_1(x) - f_2(x) = -3x^2 + 3x = 3x(-x + 1)$ である。

$$f_1(x) - f_2(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

に注意する。

[1] $0 < c < 1$ のとき

$-c \leq x \leq 0$ において、 $f_1(x) - f_2(x) \leq 0$ 、 $0 \leq x \leq c$ において、 $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c |f_1(x) - f_2(x)| dx &= -\int_{-c}^0 \{f_1(x) - f_2(x)\} dx + \int_0^c \{f_1(x) - f_2(x)\} dx \\ &= -\int_{-c}^0 (3x^2 - 3x) dx + \int_0^c (3x^2 - 3x) dx \\ &= -\left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-c}^0 + \left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^c \\ &= 0 + \left(c^3 + \frac{3}{2}c^2\right) + \left(-c^3 + \frac{3}{2}c^2\right) - 0 \\ &= 3c^2 \end{aligned}$$

となる。

[2] $c \geq 1$ のとき

$-c \leq x \leq 0, 1 \leq x \leq c$ において、 $f_1(x) - f_2(x) \leq 0$ 、 $0 \leq x \leq 1$ において、 $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c |f_1(x) - f_2(x)| dx &= -\int_{-c}^0 \{f_1(x) - f_2(x)\} dx + \int_0^1 \{f_1(x) - f_2(x)\} dx - \int_1^c \{f_1(x) - f_2(x)\} dx \\ &= -\left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-c}^0 + \left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 - \left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^c \\ &= 0 + \left(c^3 + \frac{3}{2}c^2\right) + \left(-1 + \frac{3}{2}\right) - 0 - \left(-c^3 + \frac{3}{2}c^2\right) + \left(-1 + \frac{3}{2}\right) \\ &= 2c^3 + 1 \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、

$$0 < c < 1 \text{ のとき } 3c^2$$

$$c \geq 1 \text{ のとき } 2c^3 + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{array}{l} 0 < c < 1 \text{ のとき } 3c^2 \\ c \geq 1 \text{ のとき } 2c^3 + 1 \end{array}$$