

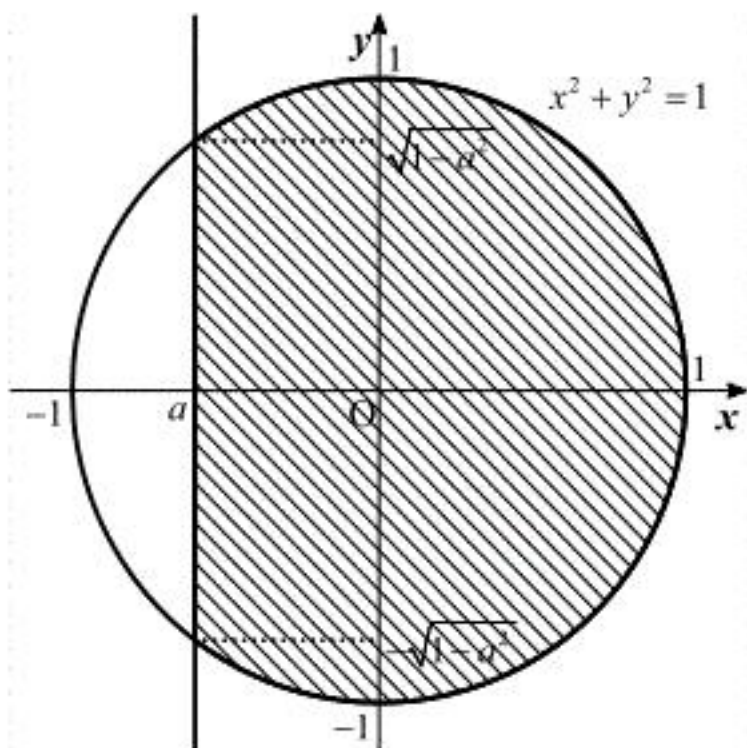
【1】

(1)

座標平面上の点 (x, y) が $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq a$ を満たすとき、点 (x, y) が動く領域を D とおく。

[1] $-1 < a < 0$ のとき

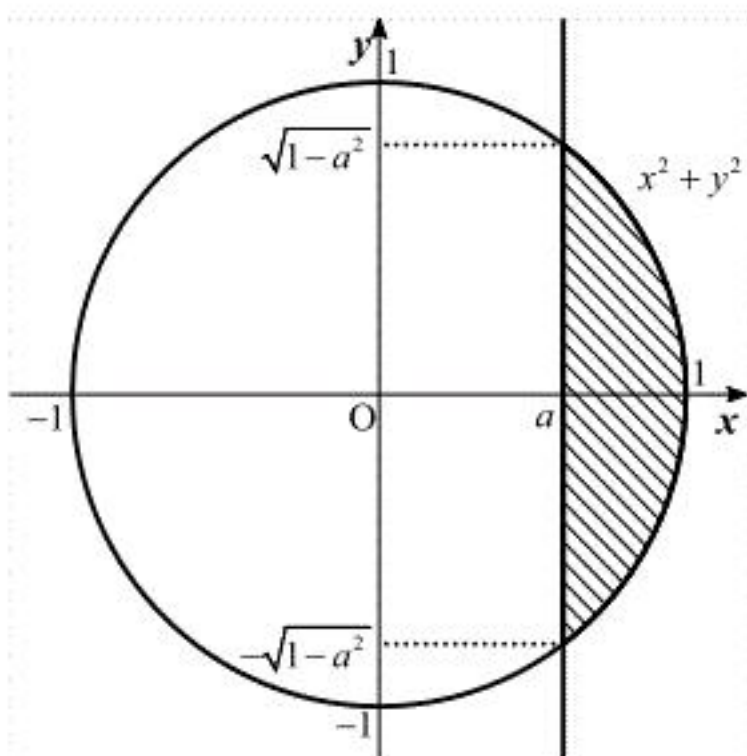
D を図示すると下図の斜線部のようになる。



この図より、 y の最大値は1である。

[2] $0 \leq a < 1$ のとき

D を図示すると下図の斜線部のようになる。



この図より、 y の最大値は $\sqrt{1-a^2}$ である。

以上[1],[2]より、 $-1 < a < 0$ のとき最大値は1, $0 \leq a < 1$ のとき最大値は $\sqrt{1-a^2}$ である。

(答) $-1 < a < 0$ のとき1
 $0 \leq a < 1$ のとき $\sqrt{1-a^2}$

(2)

$y-x=k$ とおくと、 $y=x+k$ となる。ゆえに、座標平面上において、直線 $y=x+k$ が D と共有点を持つような k の最大値が $y-x$ の最大値である。ここで、直線 $y=x+k$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と第2象限で接するときを考える。2式を連立して

$$\begin{aligned} x^2 + (x+k)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2kx + k^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

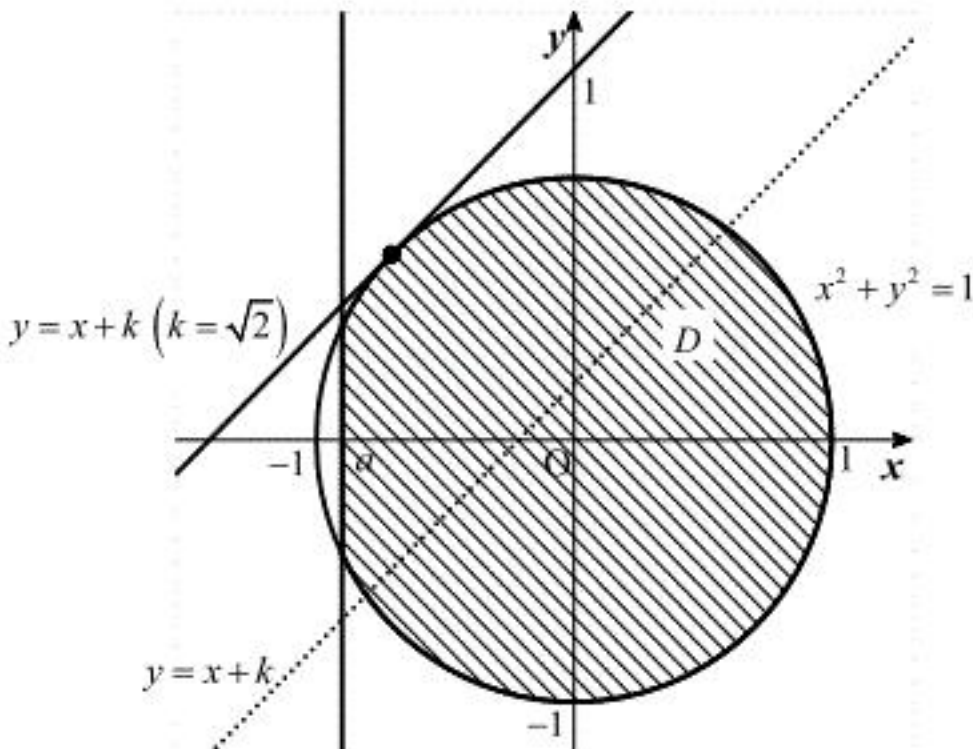
が得られる。直線 $y=x+k$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と第2象限で接する条件は、この2次方程式が重解を持ち、重解が $x < 0$ を満たすことである。ゆえに、判別式を D_c とすると、この条件は

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{D_c}{4} = 0 \\ -\frac{2k}{2 \cdot 2} < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 2(k^2 - 1) = 0 \\ k > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = 2 \\ k > 0 \end{cases} \\ \therefore k = \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。また、このときの接点の x 座標は $-\frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、 y 座標は $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。直線 $y=x+k$ と D の共有点を a の値で場合分けして考える。

[1] $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

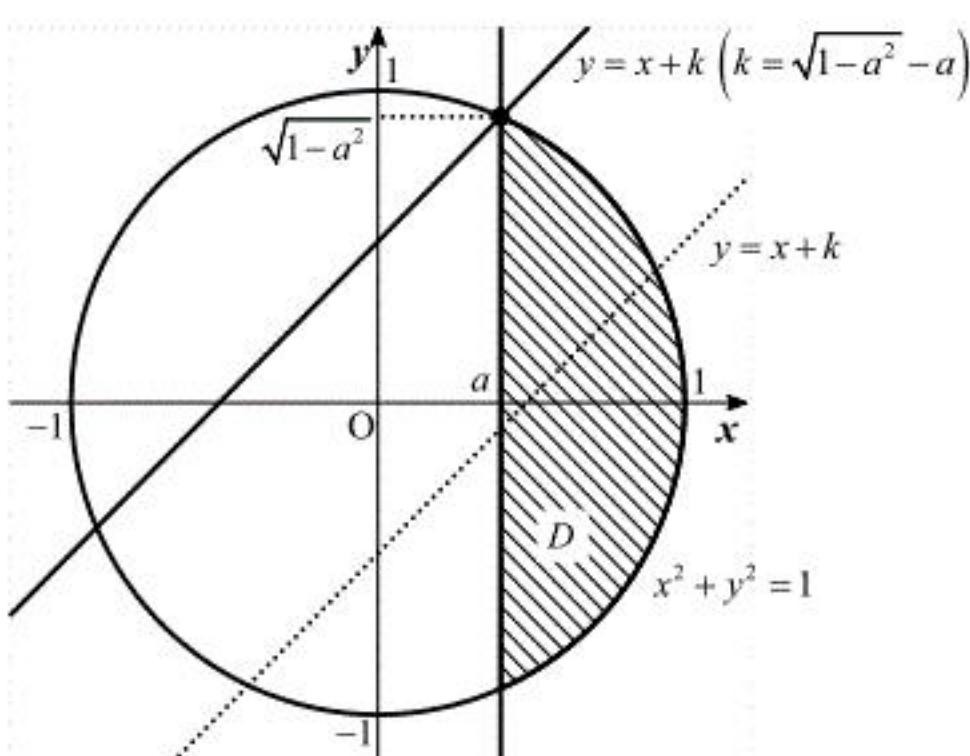
直線 $y=x+k$ と D を図示すると下図のようになる。



この図より、直線 $y=x+k$ が D と共有点を持つような k が最大となるのは、直線 $y=x+k$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と第2象限で接するときであり、最大値は $\sqrt{2}$ である。

[2] $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ のとき

直線 $y=x+k$ と D を図示すると下図のようになる。



この図より、直線 $y=x+k$ が D と共有点を持つような k が最大となるのは、直線 $y=x+k$ が点 $(a, \sqrt{1-a^2})$ を通るときであり、最大値は $\sqrt{1-a^2} - a$ である。

以上[1],[2]より、 $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値は $\sqrt{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ のとき最大値は $\sqrt{1-a^2} - a$ である。

(答) $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $\sqrt{2}$
 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ のとき $\sqrt{1-a^2} - a$

〔2〕

(1)

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$S_n = S_1 = a_1 = a$$

$$\frac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\} = a$$

より、 $\textcircled{1}$ は成立する。

[2] $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成立と仮定する

このとき、

$$S_k = \frac{1}{2}k\{2a-3(k-1)\}$$

が成立する。さらに、 a_n は初項 a 、公差 -3 の等差数列だから、一般項は

$$a_n = a-3(n-1) = -3n+a+3$$

と求まる。ゆえに、

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= \frac{1}{2}k\{2a-3(k-1)\} - 3(k+1) + a + 3 \\ &= ka - \frac{3}{2}k(k-1) - 3(k+1) + a + 3 \\ &= a(k+1) - \frac{3}{2}k(k+1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)[2a-3\{(k+1)-1\}] \end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{1}$ は $n=k+1$ のときも成立する。

以上[1],[2]から $\textcircled{1}$ はすべての自然数 n について成立する。

(証明終)

(2)

a_n の一般項を代入して展開すると、

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n (n-k+1)a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (n-k+1)(-3k+a+3) \\ &= \sum_{k=1}^n \{3k^2 - (3n+6+a)k + (n+1)(a+3)\} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - (3n+6+a) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)(a+3) \cdot n \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(a+1-n) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad T_n = \frac{1}{2}n(n+1)(a+1-n)$$

(3)

$S_n < 0$ について変形して、

$$\begin{aligned} S_n &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\} &< 0 \\ \Leftrightarrow 2a-3(n-1) &< 0 \quad (\because n > 0) \\ \therefore n &> \frac{2a+3}{3} \end{aligned}$$

と求まる。 $T_n \geq 0$ について変形して、

$$\begin{aligned} T_n &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n+1)(a+1-n) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a+1-n &\geq 0 \quad (\because n > 0) \\ \therefore n &\leq a+1 \end{aligned}$$

と求まる。以上より n の範囲は、

$$\frac{2a+3}{3} < n \leq a+1$$

と求まる。 $a+1$ は自然数であるから、この範囲で n が自然数の解を 30 個持つとき、その 30 解は $a-28$ から $a+1$ までの連続する自然数 30 個である。よって、

$$a-29 \leq \frac{2a+3}{3} < a-28$$

といえる。これを解いて、 $87 < a \leq 90$ であるから、これを満たす a は 88, 89, 90 である。

(答) 88, 89, 90

【3】

【A】

(1)

白玉の個数を a 個、赤玉の個数を b 個とすると、青玉の個数は $25-a-b$ 個となる。2 個の玉を同時に取り出すとき、白玉1個と青玉1個を取り出す確率が $\frac{1}{6}$ であるから、

$$\frac{{}_a C_1 \cdot {}_{25-a-b} C_1}{{}_{25} C_2} = \frac{1}{6} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。同様に 2 個の玉を同時に取り出すとき、赤玉1個と青玉1個を取り出す確率が $\frac{1}{6}$ であるから、

$$\frac{{}_b C_1 \cdot {}_{25-a-b} C_1}{{}_{25} C_2} = \frac{1}{6} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。①,②より、 ${}_a C_1 = {}_b C_1$ であるから $a=b$ となる。①に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{{}_a C_1 \cdot {}_{25-2a} C_1}{{}_{25} C_2} &= \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{2a(25-2a)}{25 \cdot 24} &= \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 25a + 50 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a-5)(a-10) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{5}{2}, 10 \end{aligned}$$

が得られる。 a は自然数であるから、 $a=10$ である。このとき、

$$\begin{aligned} b &= 10 \\ 25-a-b &= 5 \end{aligned}$$

であるから、白玉、青玉、赤玉の数はそれぞれ10 個、5 個、10 個である。
(答) 白玉10 個、青玉5 個、赤玉10 個

(2)

求める確率は白玉、青玉、赤玉が1 個ずつとりだされる確率であるから、

$$\frac{{}_{10} C_1 \cdot {}_5 C_1 \cdot {}_{10} C_1}{{}_{25} C_3} = \frac{5}{23}$$

となる。
(答) $\frac{5}{23}$

(3)

同時に 4 個の玉を取り出したときに、取り出した玉がすべての色の玉を含むようなときに、取り出される玉の色の組み合わせで場合分けを行う。

[1] 白玉2 個、青玉1 個、赤玉1 個のとき

この確率は、
$$\frac{{}_{10} C_2 \cdot {}_5 C_1 \cdot {}_{10} C_1}{{}_{25} C_4} = \frac{2250}{{}_{25} C_4}$$

である。

[2] 白玉1 個、青玉2 個、赤玉1 個のとき

この確率は、
$$\frac{{}_{10} C_1 \cdot {}_5 C_2 \cdot {}_{10} C_1}{{}_{25} C_4} = \frac{1000}{{}_{25} C_4}$$

である。

[3] 白玉1 個、青玉1 個、赤玉2 個のとき

この確率は、
$$\frac{{}_{10} C_1 \cdot {}_5 C_1 \cdot {}_{10} C_2}{{}_{25} C_4} = \frac{2250}{{}_{25} C_4}$$

である。

ここで、求める確率は[1]または[2]または[3]の条件下で[2]となる確率であるから、

$$\frac{\frac{1000}{{}_{25} C_4}}{\frac{2250}{{}_{25} C_4} + \frac{1000}{{}_{25} C_4} + \frac{2250}{{}_{25} C_4}} = \frac{1000}{5500} = \frac{2}{11}$$

と求まる。
(答) $\frac{2}{11}$

【B】

(1)

標本平均の平均は母平均に等しいので、 $\overline{X}$ の平均は105、 $\overline{Y}$ の平均は104 である。また標本平均の分散は母分散を標本数でわった値になるので、 $\overline{X}$ の分散は

$$\frac{\sqrt{5}^2}{10} = \frac{1}{2}$$

であり、 $\overline{Y}$ の分散は

$$\frac{\sqrt{2}^2}{4} = \frac{1}{2}$$

である。

$\overline{X}$ の平均：105、 $\overline{Y}$ の平均：104
(答) $\overline{X}$ の分散： $\frac{1}{2}$ 、 $\overline{Y}$ の分散： $\frac{1}{2}$

(2)

$\overline{X}$ と $\overline{Y}$ が独立であることから、 W の平均は

$$105-104=1$$

と求まる。また、 W の分散も $\overline{X}$ と $\overline{Y}$ が独立であることから、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

と求まる。
(答) 平均：1、分散：1

(3)

(2)より、 W の標準偏差は $\sqrt{1}=1$ である。ゆえに、標準正規分布に従う確率変数 Z に関して、

$$Z = \frac{W-1}{1} \Leftrightarrow Z = W-1$$

が成り立つ。よって、 $P(W \geq 0)$ について

$$P(W \geq 0) = P(Z \geq -1)$$

が成立し、求める確率は

$$0.341+0.5=0.841$$

である。
(答) 0.841

(4)

(1),(2),(3)と同様に考えると、 $\overline{X'}$ の平均は105、 $\overline{Y'}$ の平均は104 である。さらに $\overline{X'}$ と $\overline{Y'}$ が独立

であるから、 W' の平均と分散はそれぞれ

$$105-104=1$$

$$\frac{\sqrt{5}^2}{25} + \frac{\sqrt{2}^2}{8} = \frac{9}{20}$$

である。また、 W' の標準偏差は $\sqrt{\frac{9}{20}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$ であるから、

$$Z = \frac{W'-1}{\frac{3}{2\sqrt{5}}}$$

が成立する。よって、 $P(W' \geq 0)$ について

$$P(W' \geq 0) = P(Z \geq -\frac{2\sqrt{5}}{3})$$

が成立する。ここで

$$P(Z \geq -\frac{2\sqrt{5}}{3}) > P(Z \geq -1)$$

であるから、

$$P(W' \geq 0) > P(W \geq 0)$$

が成り立つ。
(答) $P(W' \geq 0) > P(W \geq 0)$