

平成 30 年 度

入学者選抜学力試験問題



数 学 (前期)

〔注 意〕

1. 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. この冊子の問題は 3 ページからなる。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば監督者に申し出て、問題冊子の交換を受けること。
3. 監督者の指示に従って、解答用紙(4 枚)すべてに受験番号および氏名を必ず記入すること。
4. 〔1〕から〔4〕までの 4 問に解答すること。ただし、〔3〕、〔4〕についてはそれぞれ 2 題あるうちから 1 題を選択して解答すること。このとき、選択した問題の問題記号(〔3〕は A または B, 〔4〕は C または D)を解答用紙の問題番号の横の【 】内に記入すること。解答は、記入された問題記号のとおりに採点される。また、問題記号の記入のない解答用紙は、未解答とみなす。
5. 解答は、必ず解答用紙(4 枚)の指定された枠内に記入すること。書ききれない場合は解答用紙の裏面の指定された枠内に記入すること。
6. この問題冊子は持ち帰ること。

[1] x, y が 2 つの不等式 $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq a$ を満たすとする。ただし、
 $-1 < a < 1$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) y の最大値を求めよ。
- (2) $y - x$ の最大値を求めよ。

[2] 初項 a 、公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。
また、 T_n を次の式で定める。

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n (n - k + 1) a_k \\ &= na_1 + (n - 1)a_2 + (n - 2)a_3 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数学的帰納法を用いて、 $S_n = \frac{1}{2}n\{2a - 3(n - 1)\}$ となることを証明せよ。
- (2) T_n を a, n を用いて表せ。
- (3) a を自然数とする。 $S_n < 0$ かつ $T_n \geq 0$ を満たす自然数 n の個数が 30 であるような a の値をすべて求めよ。

- 〔3〕 次の2題【A】，【B】からいずれか1題を選択し，解答用紙の問題番号の横の【 】内に選択した問題記号(AまたはB)を記入し，解答せよ。

【A】 1つの袋の中に白玉，青玉，赤玉が合わせて25個入っている。この袋の中から2個の玉を同時に取り出すとき，白玉1個と青玉1個が取り出される確率は $\frac{1}{6}$ であり，青玉1個と赤玉1個が取り出される確率も $\frac{1}{6}$ である。このとき，次の問いに答えよ。

- (1) この袋の中に入っている白玉，青玉，赤玉の個数をそれぞれ求めよ。
- (2) この袋から同時に3個の玉を取り出すとき，すべての色の玉が含まれる確率を求めよ。
- (3) この袋から同時に4個の玉を取り出す。取り出した玉がすべての色の玉を含んでいたとき，その中に青玉が2個入っている確率を求めよ。

【B】 A店のあんパンの重さは平均105 g，標準偏差 $\sqrt{5}$ gの正規分布に従い，B店のあんパンの重さは平均104 g，標準偏差 $\sqrt{2}$ gの正規分布に従うとする。また，あんパンの重さはすべて独立とする。このとき，次の問いに答えよ。

- (1) A店のあんパン10個の重さをそれぞれ量り，その標本平均を $\bar{X}$ [g]とする。同様に，B店のあんパン4個の重さの標本平均を $\bar{Y}$ [g]とする。このとき， $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ の平均と分散をそれぞれ求めよ。
- (2) A店とB店のあんパンの重さを比較したい。 $W = \bar{X} - \bar{Y}$ の平均と分散をそれぞれ求めよ。ただし， $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ が独立であることを用いてよい。
- (3) W が正規分布に従うことを用いて，確率 $P(W \geq 0)$ を求めよ。ただし，以下の数表を用いてよい。ここで， Z は標準正規分布に従う確率変数である。

u	0	1	2	3
$P(0 \leq Z \leq u)$	0.000	0.341	0.477	0.499

- (4) A店のあんパン25個の重さをそれぞれ量り，その標本平均を $\bar{X}'$ [g]とする。同様に，B店のあんパン8個の重さの標本平均を $\bar{Y}'$ [g]とする。 $W' = \bar{X}' - \bar{Y}'$ とすると，確率 $P(W' \geq 0)$ と確率 $P(W \geq 0)$ の大小を比較せよ。ただし， $\bar{X}'$ と $\bar{Y}'$ が独立であることと， W' が正規分布に従うことを用いてよい。

〔4〕 次の2題【C】，【D】からいずれか1題を選択し，解答用紙の問題番号の横の

【 】内に選択した問題記号(CまたはD)を記入し，解答せよ。

【C】 自然数 a, b に対し，

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 8$$

とする。 $f(x) = 0$ の解がすべて自然数のとき，次の問いに答えよ。

- (1) $a\beta\gamma = 8$ を満たす自然数の組 (a, β, γ) をすべて求めよ。ただし， $a \leq \beta \leq \gamma$ とする。
- (2) a のとりうる値の中で最大のものを a_1 ，そのときの b の値を b_1 とする。また， a のとりうる値の中で2番目に大きいものを a_2 ，そのときの b の値を b_2 とする。 (a_1, b_1) および (a_2, b_2) を求めよ。
- (3) $f_1(x) = x^3 - a_1x^2 + b_1x - 8$ ， $f_2(x) = x^3 - a_2x^2 + b_2x - 8$ とする。

定積分

$$\int_{-c}^c |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

を c を用いて表せ。ただし， $c > 0$ とする。

【D】 a, b, c, d は定数とする。ただし， $d > 1$ とする。関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax^2 + bx + c & (1 < x \leq d) \\ 3 & (d < x) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ がすべての実数 x において連続であるとき， b を a, d を用いて表せ。
- (2) $f(x)$ がすべての実数 x において微分可能であるとき， a, b, c, d の値をそれぞれ求めよ。

