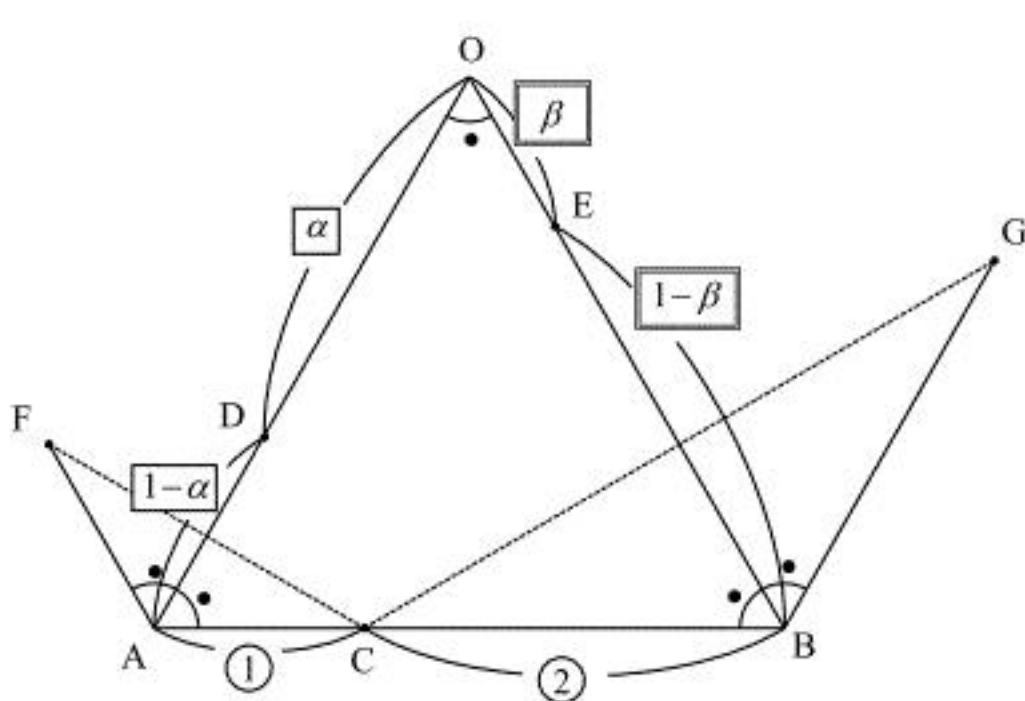


【1】

(1) 正三角形および点 C~G は下図の通りである。



点 F は線分 OA に関して点 C と対称な点であるから、
 $\angle OAC = \angle OAF (= 60^\circ)$
 $AF = AC$
 $DF = DC$

である。同様に、点 G は線分 OB に関して点 C と対称な点であるから、
 $\angle OBC = \angle OBG (= 60^\circ)$
 $BG = BC$
 $EG = EC$

である。△ OAB の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} OA \cdot OB \end{aligned}$$

である。また、△ ADF の面積を T とすると、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} AD \cdot AF \sin \angle OAF \\ &= \frac{1}{2} AD \cdot AF \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} AD \cdot AF \end{aligned}$$

である。 $AD = (1-\alpha)OA$, $AF = AC = \frac{1}{3}AB$ であるから、以上より、

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{3}}{4} (1-\alpha)OA \cdot \frac{1}{3}AB \\ &= \frac{1}{3} (1-\alpha)S \end{aligned}$$

である。よって、 $T = \frac{1}{6}S$ となるとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (1-\alpha) &= \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\alpha = \frac{1}{2}$

(2)

$\angle AOB = \angle OAF = 60^\circ$ より、線分 OB と線分 AF は平行である。また、 $AF = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}OB$ であるから、 $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ であり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} \\ &= \overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

となる。また、 $\angle AOB = \angle OBG = 60^\circ$ より、線分 OA と線分 BG は平行である。また、

$BG = BC = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}OA$ であるから、 $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ であり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

(3)

$CD = FD$, $EC = EG$ であるから、△ CDE の 3 辺の長さの和 $CD + DE + EC$ について、

$$CD + DE + EC = FD + DE + EG$$

である。ここで、 $FD + DE + EG$ が最小になるのは、点 F, D, E, G が同一直線上にあるときである。

(2)より、 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ であるから、点 F, D, E, G が同一直線上にあるとき、実数 k, l を用いて、 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ について、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= (1-k)\overrightarrow{OF} + k\overrightarrow{OG} \\ &= \frac{3-5k}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{4k-1}{3}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OE} &= (1-l)\overrightarrow{OF} + l\overrightarrow{OG} \\ &= \frac{3-5l}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{4l-1}{3}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表せる。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \alpha\overrightarrow{OA} \\ \Leftrightarrow \frac{3-5k}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{4k-1}{3}\overrightarrow{OB} &= \alpha\overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

であるから、係数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{3-5k}{3} = \alpha \\ \frac{4k-1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{7}{12} \\ k = \frac{1}{4} \end{cases}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \beta\overrightarrow{OB} \\ \Leftrightarrow \frac{3-5l}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{4l-1}{3}\overrightarrow{OB} &= \beta\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

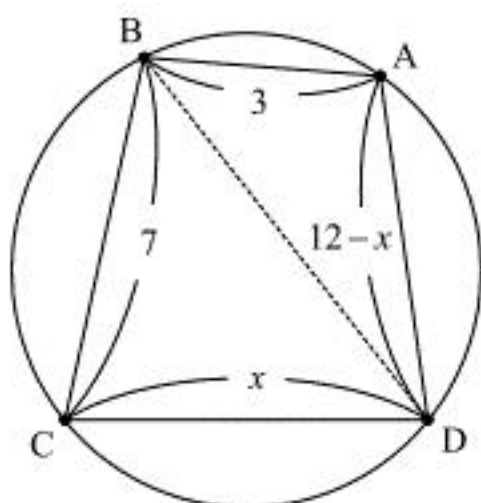
であるから、

$$\begin{cases} \frac{3-5l}{3} = 0 \\ \frac{4l-1}{3} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{7}{15} \\ l = \frac{3}{5} \end{cases}$$

となる。

(答) $\alpha = \frac{7}{12}$, $\beta = \frac{7}{15}$

[2]



(1)

四角形 ABCD は円に内接しているから、

$$\cos C = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

である。 $x=7$ のとき $CD=7$, $DA=5$ であるから、 $\triangle ABD$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos A \\ &= 34 - 30 \cos A \end{aligned}$$

である。また、 $\triangle CBD$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cdot \cos C \\ &= 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot (-\cos A) \\ &= 98 + 98 \cos A \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 34 - 30 \cos A &= 98 + 98 \cos A \\ \Leftrightarrow \cos A &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり、 $0^\circ < A < 180^\circ$ より、 $A = 120^\circ$ である。

$$(\text{答}) \cos A = -\frac{1}{2}, A = 120^\circ$$

(2)

$\triangle ABD$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A \\ &= 3^2 + (12-x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot (12-x) \cdot \cos A \\ &= 153 - 24x + x^2 - (72 - 6x) \cos A \end{aligned}$$

であり、 $\triangle CBD$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cdot \cos C \\ &= 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \cdot (-\cos A) \\ &= 49 + x^2 + 14x \cos A \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 153 - 24x + x^2 - (72 - 6x) \cos A &= 49 + x^2 + 14x \cos A \\ \Leftrightarrow (8x + 72) \cos A &= -24x + 104 \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{-3x + 13}{x + 9} \quad (\because x > 1) \end{aligned}$$

となる。また、 $0^\circ < A < 180^\circ$ より、 $\sin A > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{-3x + 13}{x + 9} \right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2(-x^2 + 12x - 11)}}{x + 9} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \cos A = \frac{-3x + 13}{x + 9}, \sin A = \frac{2\sqrt{2(-x^2 + 12x - 11)}}{x + 9}$$

(3)

四角形 ABCD の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin A + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (12-x) \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot x \cdot \sin A \\ &= 2(x+9) \cdot \frac{2\sqrt{2(-x^2 + 12x - 11)}}{x+9} \\ &= 4\sqrt{2(-x^2 + 12x - 11)} \\ &= 4\sqrt{-2(x-6)^2 + 50} \end{aligned}$$

となる。 $1 < x < 11$ より、 $x=6$ のとき S は最大値 $4\sqrt{50} (= 20\sqrt{2})$ をとる。

$$(\text{答}) 20\sqrt{2}$$

[3]

(1)

$f(x) = \frac{5}{4}x^2 - 1$ について、 $f(a) = a, f(b) = b$ であるとき、 a, b は $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - x - 1 = 0$ の解である。

$$\begin{aligned}\frac{5}{4}x^2 - x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{5}\end{aligned}$$

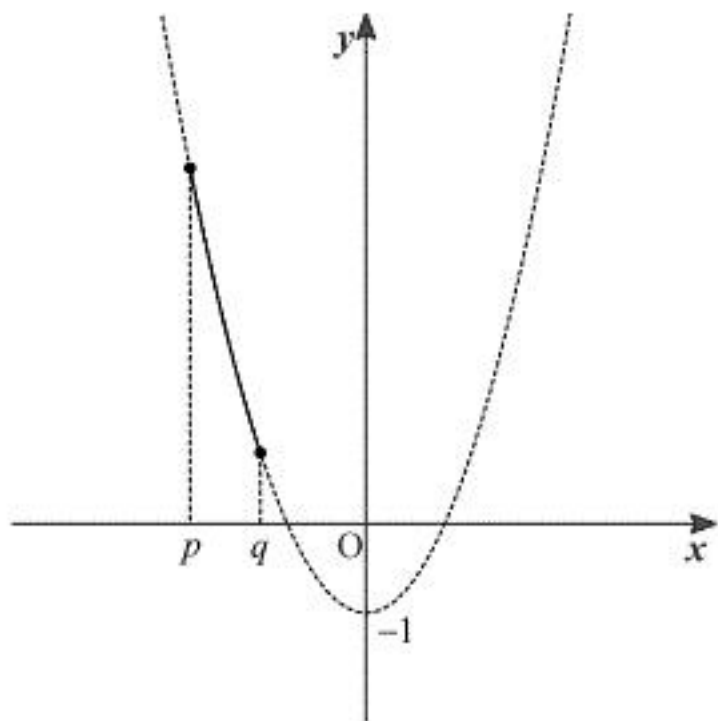
であり、また、 $a < b$ より、 $a = \frac{2-2\sqrt{6}}{5}, b = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$ である。 $a \leq x \leq b$ における $f(x)$ の最小値は $f(0) = -1$ であり、 $|a| < |b|$ より、最大値は $f(b) = b = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$ である。

(答) 最小値： -1 ，最大値： $\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$

(2)

「 $p < q$ であり、 $p \leq x \leq q$ における $f(x)$ の最小値が p ，最大値が q となる(☆)」ような (p, q) の組を求める。

[1] $p < q < 0$ のとき



$f(x)$ の最大値は $f(p)$ ，最小値は $f(q)$ であるから、

$$\begin{cases} \frac{5}{4}p^2 - 1 = q & \cdots \textcircled{1} \\ \frac{5}{4}q^2 - 1 = p & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、

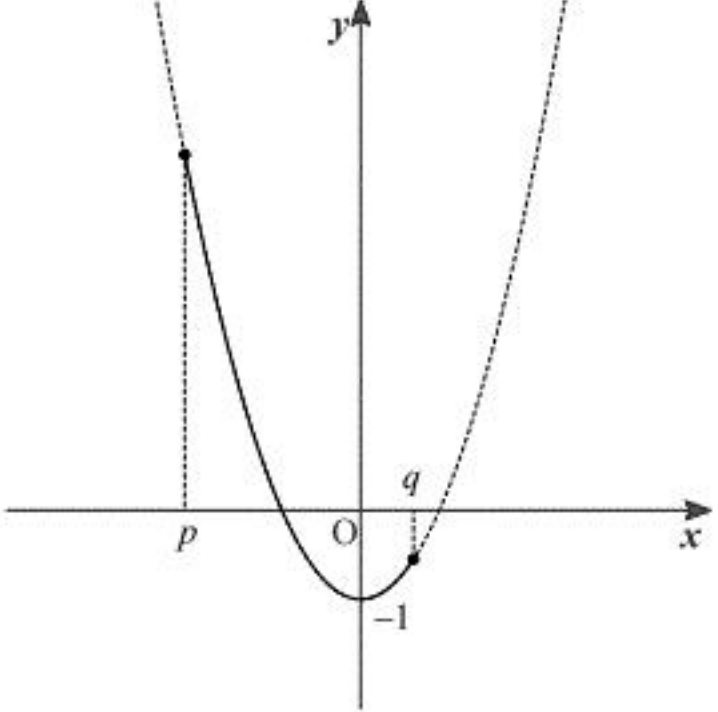
$$\begin{aligned}\frac{5}{4}(p^2 - q^2) &= q - p \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4}(p+q)(p-q) &= q - p \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4}(p+q) &= -1 \quad (\because p \neq q) \\ \Leftrightarrow q &= -p - \frac{4}{5}\end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}$ に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{5}{4}p^2 - 1 &= -p - \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow 25p^2 + 20p - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{-2-2\sqrt{2}}{5} \quad (\because p < 0)\end{aligned}$$

となる。このとき、 $q = -\frac{-2-2\sqrt{2}}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2\sqrt{2}-2}{5}$ となるが、これは $q < 0$ を満たさない。よって、 $p < q < 0$ のとき、(☆)を満たす (p, q) の組は存在しない。

[2] $p \leq 0 \leq q$ かつ $|p| > |q|$ のとき、

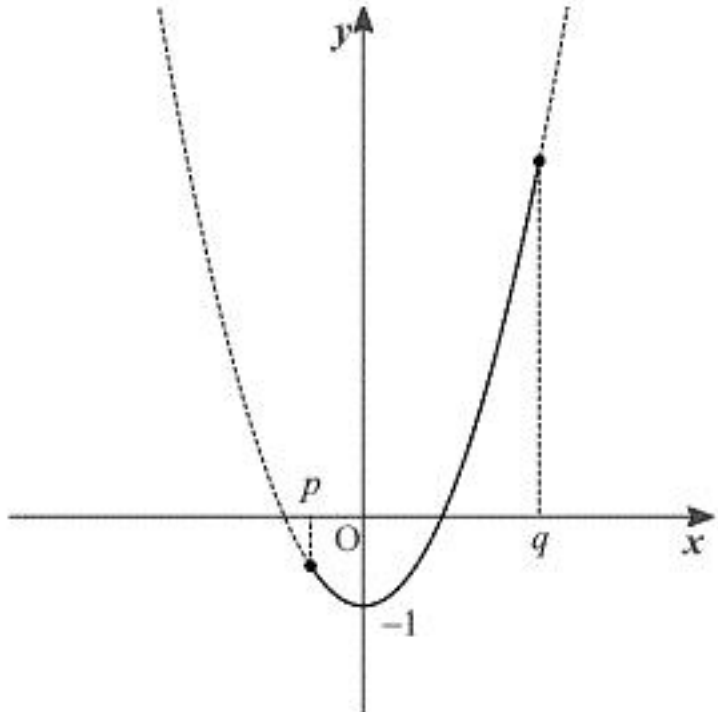


最小値は -1 であるから、 $p = -1$ である。また、 $x = p$ のとき最大値 q をとるから、

$$\begin{aligned}q &= \frac{5}{4}p^2 - 1 \\ &= \frac{5}{4}(-1)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。以上より、 $(p, q) = \left(-1, \frac{1}{4}\right)$ は(☆)を満たす。

[3] $p \leq 0 \leq q$ かつ $|p| < |q|$ のとき、

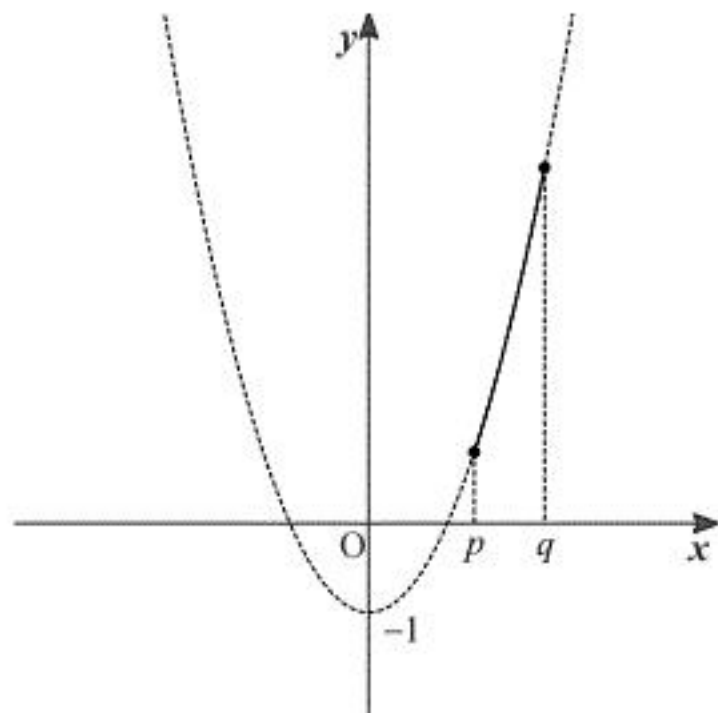


最小値は -1 であるから、 $p = -1$ である。また、 $x = q$ のとき最大値 q をとるから、

$q = f(q)$ を満たす。このとき、(1)および $q > 0$ より、 $q = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$ である。以上より、

$(p, q) = \left(-1, \frac{2+2\sqrt{6}}{5}\right)$ は(☆)を満たす。

[4] $0 < p < q$ のとき、



$f(x)$ の最小値は $f(p)$ ，最大値は $f(q)$ であるから、 $p = f(p), q = f(q)$ となる。(1)と

$p < q$ より、 $p = \frac{2-2\sqrt{6}}{5}, q = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$ となるが、これは $p > 0$ を満たさない。以上より、

$0 < p < q$ のとき、(☆)を満たす p, q の組は存在しない。

以上[1]~[4]より、(☆)を満たす p, q の組は $(p, q) = \left(-1, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{2+2\sqrt{6}}{5}\right)$ である。

(答) $\left(-1, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{2+2\sqrt{6}}{5}\right)$

[4]

(1)

3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について、係数はすべて実数であり、虚数解 $x = 2 + i$ をもつから、共役な複素数 $2 - i$ も解となる。もう一つの解を α とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} a = -\{(2+i) + (2-i) + \alpha\} \\ b = (2+i)(2-i) + (2+i)\alpha + (2-i)\alpha \\ c = -(2+i)(2-i)\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\alpha - 4 \\ b = 4\alpha + 5 \\ c = -5\alpha \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{cases} b = -4a - 11 \\ c = 5a + 20 \end{cases}$$

と表せる。

(答) $b = -4a - 11, c = 5a + 20$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\ &= 3x^2 + 2ax - 4a - 11 \end{aligned}$$

である。したがって、 $f(x)$ の $x = 2$ における微分係数は、

$$\begin{aligned} f'(2) &= 12 + 4a - 4a - 11 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) 1

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax - 4a - 11 \\ &= 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2 + 12a + 33}{3} \end{aligned}$$

であるから、 $y = f'(x)$ の最小値は $f'\left(-\frac{a}{3}\right)$ である。関数 $f'(x)$ は2次の係数が正の2次関数であるから、

「 $f(x)$ が極大値および極小値をもつ」

$\Leftrightarrow$ 「 $f'(x) < 0$ となる x が存在する」

$\Leftrightarrow (f'(x) \text{ の最小値 } f'\left(-\frac{a}{3}\right)) < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{a^2 + 12a + 33}{3} < 0$

$\Leftrightarrow (a + 6 + \sqrt{3})(a + 6 - \sqrt{3}) > 0$

$\therefore a < -6 - \sqrt{3}, -6 + \sqrt{3} < a \quad \dots \textcircled{1}$

である。 a が①を満たすとき、 $f'(x) = 0$ の解を β, γ ($\beta < \gamma$) とすると、 $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	$\dots$	β	$\dots$	γ	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

以下、①のもと、放物線 $y = f'(x)$ の軸 $x = -\frac{a}{3}$ の位置によって場合分けをして、 $\gamma > 2$ となる条件を考える。

[1] $-\frac{a}{3} < 2$ ($\Leftrightarrow a > -6$) のとき

このとき、 $\gamma > 2$ には $f'(2) < 0$ が必要であるが、(2)より $f'(2) > 0$ であるから、 $\gamma < 2$ となり不適である。

[2] $-\frac{a}{3} \geq 2$ ($\Leftrightarrow a \leq -6$) のとき、

γ は $f'(x) = 0$ の解のうち大きいものであるから、 $\gamma > 2$ を満たす。

以上、[1], [2] および①より、 $f(x)$ が $x > 2$ において $f(x)$ が極小値をとるような a の値の範囲は、 $a < -6 - \sqrt{3}$ である。

(答) $a < -6 - \sqrt{3}$