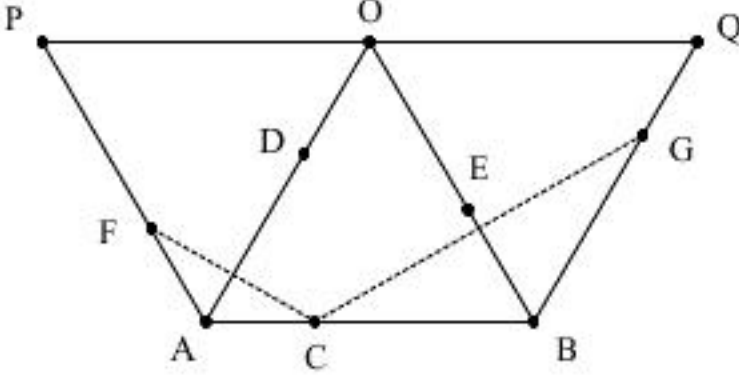


【1】

(1)

線分 OA に関して点 B と対称な点を P，線分 OB に関して点 A と対称な点を Q とおく。このとき，三角形 OAB，三角形 OPA，三角形 OBQ を図示すると，下ようになる。



このとき，三角形 ADF は，線分 AD について三角形 ADC と線対称であるから，三角形 ADF の面積は三角形 ADC の面積と等しい。三角形 OAB の面積を S ，三角形 ADC の面積を S' とおくと，

$$\begin{aligned} S' &= \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AD}{OA} \cdot S \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\alpha}{1} \cdot S \\ &= \frac{1-\alpha}{3} S \end{aligned}$$

である。よって，三角形 ADF の面積が正三角形 OAB の面積の $\frac{1}{6}$ となるとき，

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{3} &= \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\alpha = \frac{1}{2}$

(2)

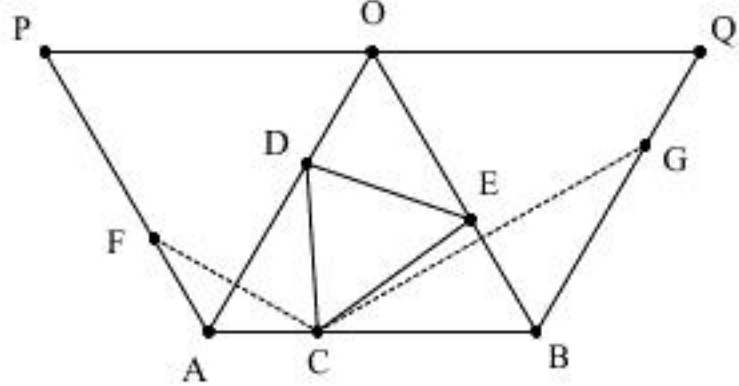
(1)の図より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot (-\overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{OA} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} \\ &= \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BQ} \\ &= \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \cdot (-\overrightarrow{OA}) \\ &= -\frac{2}{3} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OG} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

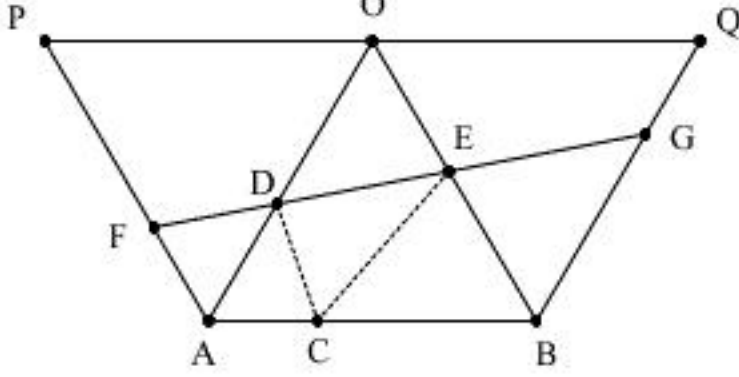
(3)



条件より， $CD = FD, EC = GE$ である。よって，三角形 CDE の 3 辺の長さの和は，

$$CD + DE + EC = FD + DE + EG$$

と表される。ここで，点 F と点 G の間の距離が最短となる経路は，線分 FG である。よって，和が最小になるのは，線分 FG 上に点 D，点 E があるとき，すなわち点 F, D, E, G が同一直線上にあるときである。これを図示すると，下ようになる。



図より，OE と FA，OD と GB はそれぞれ平行であるから，

$$\begin{aligned} OE : AF &= OD : AD \\ \Leftrightarrow \beta : \frac{1}{3} &= \alpha : 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow \beta(1 - \alpha) &= \frac{1}{3} \alpha \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \frac{1}{3} \alpha - \beta &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \\ OD : BG &= OE : BE \\ \Leftrightarrow \alpha : \frac{2}{3} &= \beta : 1 - \beta \\ \Leftrightarrow \alpha(1 - \beta) &= \frac{2}{3} \beta \\ \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha + \frac{2}{3} \beta &= 0 \end{aligned}$$

となる。2 式を連立して解くと，

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \alpha - \beta &= -\alpha + \frac{2}{3} \beta \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} \alpha &= \frac{5}{3} \beta \\ \Leftrightarrow \beta &= \frac{4}{5} \alpha \end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \alpha^2 + \frac{1}{3} \alpha - \frac{4}{5} \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(12\alpha - 7) &= 0 \end{aligned}$$

となり， $0 < \alpha < 1$ より $\alpha = \frac{7}{12}$ である。よって， $\beta = \frac{4}{5} \alpha = \frac{7}{15}$ である。

(答) $\alpha = \frac{7}{12}, \beta = \frac{7}{15}$

〔2〕

(1)

四角形 ABCD は円に内接するから、 $\angle C = 180^\circ - A$ である。三角形 ABD について、余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos A \\ &= 34 - 30 \cos A \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、三角形 CBD について、

$$\begin{aligned} BD^2 &= 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos(180^\circ - A) \\ &= 98 + 98 \cos A \end{aligned}$$

が成り立つ。2つの式を連立して解くと、

$$\begin{aligned} 34 - 30 \cos A &= 98 + 98 \cos A \\ \Leftrightarrow \cos A &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。 $0^\circ < A < 180^\circ$ であるから、 $A = 120^\circ$ である。

$$(\text{答}) \quad \cos A = -\frac{1}{2}, A = 120^\circ$$

(2)

(1)と同様に解くと、三角形 ABD と三角形 CBD について、余弦定理より、

$$\begin{cases} BD^2 = 3^2 + (12-x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot (12-x) \cdot \cos A \\ BD^2 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \cdot \cos(180^\circ - A) \end{cases}$$

が成り立つ。2式を連立して解くと、 $1 < x < 11$ に注意して、

$$\begin{aligned} 3^2 + (12-x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot (12-x) \cdot \cos A &= 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \cdot \cos(180^\circ - A) \\ \Leftrightarrow x^2 - 24x + 153 - (72 - 6x) \cos A &= x^2 + 49 + 14x \cos A \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{-3x+13}{x+9} \end{aligned}$$

となる。また、 $0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1^2 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{-3x+13}{x+9} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(x+9)^2 - (-3x+13)^2}}{x+9} \\ &= \frac{2\sqrt{-2x^2 + 24x - 22}}{x+9} \\ &= \frac{2\sqrt{-2(x-11)(x-1)}}{x+9} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos A = \frac{-3x+13}{x+9}, \sin A = \frac{2\sqrt{-2(x-11)(x-1)}}{x+9}$$

(3)

四角形 ABCD の面積を S とおく。 S は三角形 ABD と三角形 CBD の面積の和で表されるから、

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot CB \cdot CD \cdot \sin(180^\circ - A) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (12-x) \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot x \cdot \sin A \\ &= \frac{36+4x}{2} \cdot \frac{2\sqrt{-2x^2 + 24x - 22}}{x+9} \\ &= 4\sqrt{-2x^2 + 24x - 22} \\ &= 4\sqrt{-2(x-6)^2 + 50} \end{aligned}$$

と表される。よって、 $1 < x < 11$ における四角形 ABCD の最大値は、 $x = 6$ のとき、

$$\begin{aligned} S &= 4\sqrt{50} \\ &= 20\sqrt{2} \end{aligned}$$

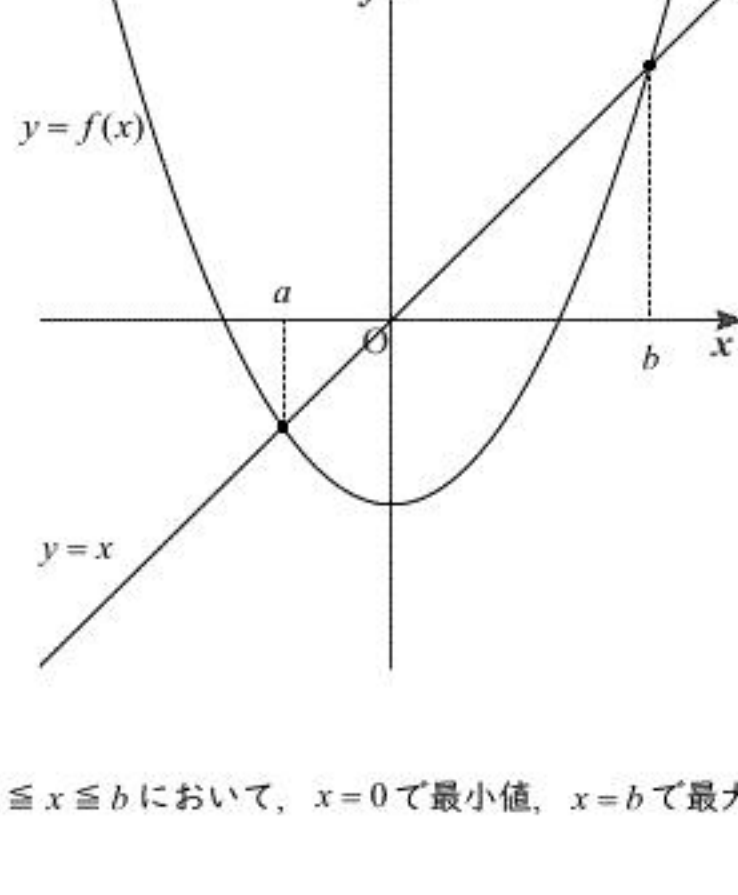
である。

$$(\text{答}) \quad 20\sqrt{2}$$

【3】【A】

(1)

$y=f(x)$ と $y=x$ を図示すると、下のようになる。



図より、 $f(x)$ は、 $a \leq x \leq b$ において、 $x=0$ で最小値、 $x=b$ で最大値をとる。 $x=f(x)$ となる x の値は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{4}x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

であり、 $a < b$ より

$$a = \frac{2-2\sqrt{6}}{5}, b = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$$

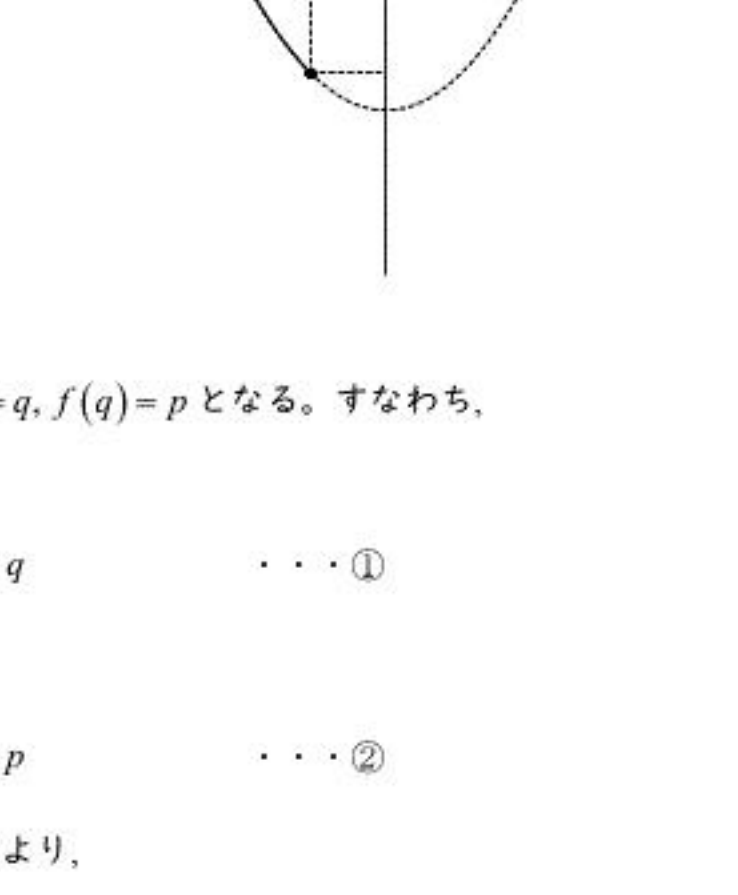
である。ここで、 $f(0)=0-1=-1$ 、 $f(b)=\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$ であるから、 $a \leq x \leq b$ における $f(x)$ の最小値と最大値は、それぞれ $f(0)$ と $f(b)$ 、すなわち -1 と $\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$ である。

(答) 最小値 -1 、最大値 $\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$

(2)

$y=f(x)$ は $x=0$ で最小値をとる。そこで、 $x=0$ と p, q の大小関係によって場合分けをする。

[1] $p < q < 0$ のとき



図より、 $f(p)=q$ 、 $f(q)=p$ となる。すなわち、

$$\begin{aligned} f(p) &= q \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4}p^2 - 1 &= q \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(q) &= p \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4}q^2 - 1 &= p \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ より、

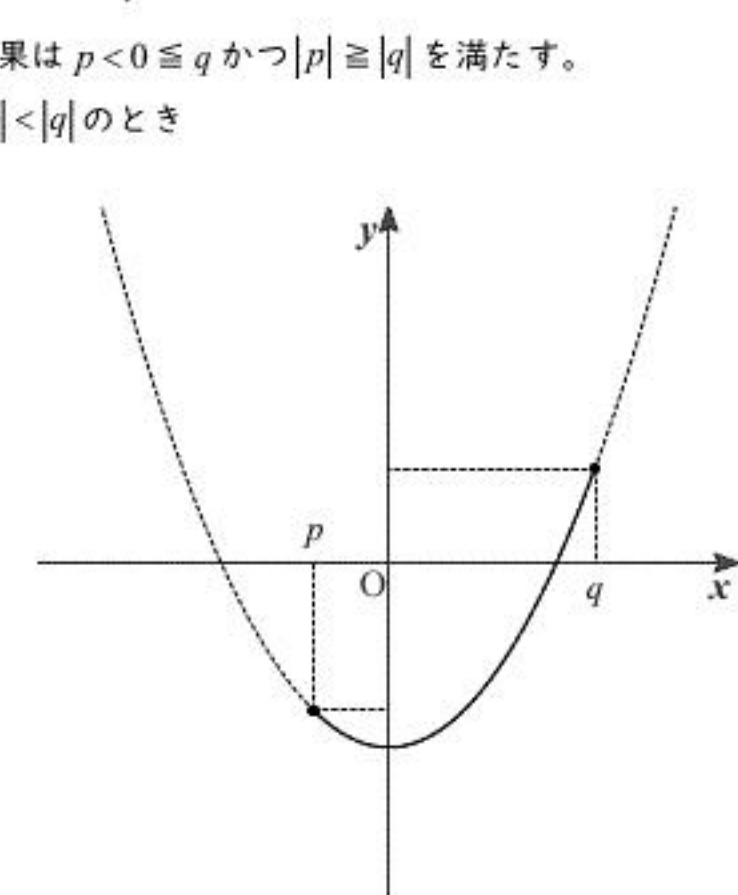
$$\begin{aligned} \frac{5}{4}(p+q)(p-q) &= -(p-q) \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4}(p+q) &= -1, p \neq q \\ \Leftrightarrow p+q &= -\frac{4}{5}, p \neq q \end{aligned}$$

となる。この結果を $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}p^2 - 1 &= -p - \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow 25p^2 + 20p - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

となる。 q についても同様の計算で同じ解が得られる。 $p < q$ より、 $p = \frac{-2-2\sqrt{2}}{5}$ 、 $q = \frac{-2+2\sqrt{2}}{5}$ となるが、 $q = \frac{-2+2\sqrt{2}}{5}$ は $q < 0$ と反する。よって、この条件で適する (p, q) は存在しない。

[2] $p < 0 \leq q$ かつ $|p| \geq |q|$ のとき

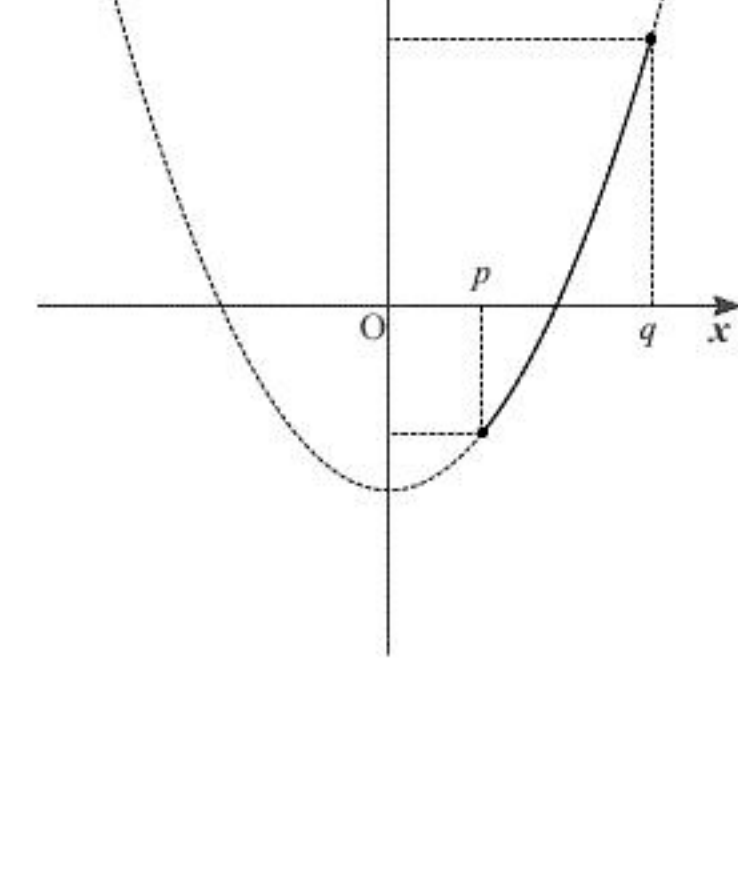


図より、最小値は $f(0)$ 、最大値は $f(p)$ である。よって、

$$\begin{aligned} p &= f(0) = -1 \\ q &= f(p) = f(-1) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。この結果は $p < 0 \leq q$ かつ $|p| \geq |q|$ を満たす。

[3] $p \leq 0 < q$ かつ $|p| < |q|$ のとき

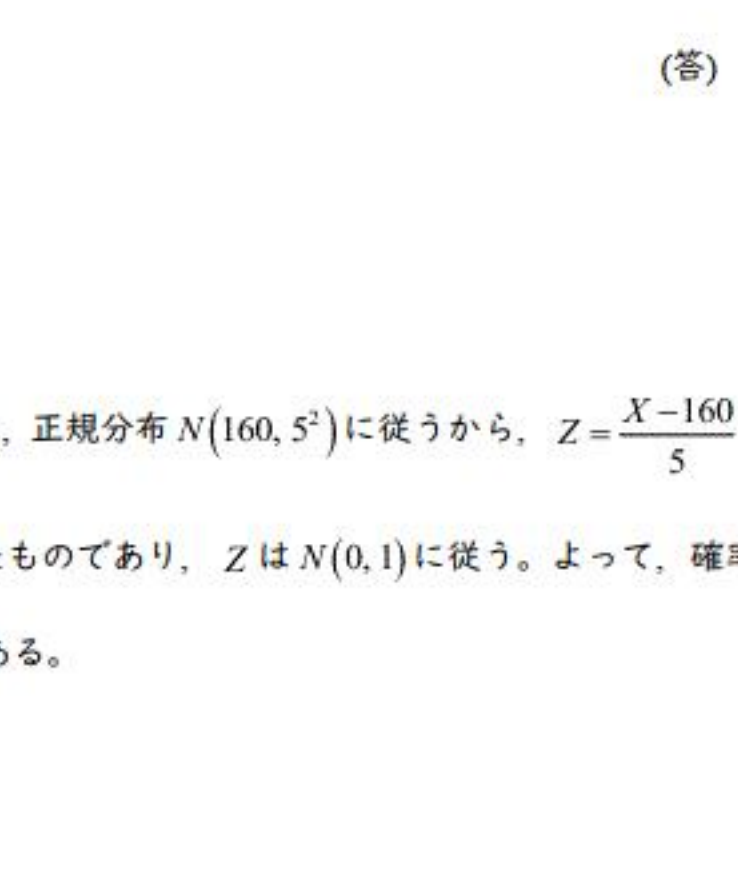


図より、最小値は $f(0)$ 、最大値は $f(q)$ である。よって、

$$p = f(0) = -1$$

である。また、 $f(q)=q$ が成り立つから、(1)の結果と条件より、 $q = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$ である。この結果は $p \leq 0 < q$ かつ $|p| < |q|$ を満たす。

[4] $0 < p < q$ のとき



図より、

$$\begin{cases} f(p) = p \\ f(q) = q \end{cases}$$

が成り立つ。これは(1)と同じ式であるから、 $p < q$ に注意して、

$$p = \frac{2-2\sqrt{6}}{5}, q = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$$

である。しかし、 $p = \frac{2-2\sqrt{6}}{5}$ は $0 < p$ に反する。よって、この条件で適する (p, q) は存在しない。

以上、[1]、[2]、[3]、[4]より、条件を満たす (p, q) の組は

$$(p, q) = \left(-1, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{2+2\sqrt{6}}{5}\right)$$

である。

(答) $(p, q) = \left(-1, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{2+2\sqrt{6}}{5}\right)$

【3】【B】

(1)

題意より、身長 X は、正規分布 $N(160, 5^2)$ に従うから、 $Z = \frac{X-160}{5}$ と定めるとき、 Z は確率変数 X を標準化したものであり、 Z は $N(0, 1)$ に従う。よって、確率変数 $\frac{X-160}{5}$ の平均は

0、標準偏差は1である。

(答) 平均0、標準偏差1

(2)

$u = \frac{x-160}{5}$ とおく。 $P(X \geq x) = 0.1$ を満たす x は、

$$\begin{aligned} P(0 \leq z \leq u) &= P(0 \leq z) - P(z \geq u) \\ &= 0.5 - 0.1 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

を満たす u を求めることで得られる。正規分布表より、これに近い値をとるのは、 $u=1.28$ のとき0.3997、 $u=1.29$ のとき0.4015である。それぞれの場合の x の値を求めると、

$$\begin{aligned} x &= 5u + 160 \\ &= 5 \cdot 1.28 + 160 \\ &= 166.4 \\ x &= 5u + 160 \\ &= 5 \cdot 1.29 + 160 \\ &= 166.45 \end{aligned}$$

であるから、条件を満たす最小の整数 x は $x=167$ である。

(答) 167

(3)

$$\begin{aligned} P(165 \leq X \leq 175) &= P\left(\frac{165-160}{5} \leq Z \leq \frac{175-160}{5}\right) \\ &= P(1 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.49865 - 0.3413 \\ &= 0.15735 \end{aligned}$$

より、小数第3位を四捨五入して、求める確率は0.16である。

(答) 0.16

(4)

標本平均 $\bar{X}$ の平均は母平均と等しく、160cmである。また、 $\bar{X}$ の標準偏差は、

$$\frac{5}{\sqrt{2500}} = 0.1\text{cm}$$

である。ここで、 $Y = \frac{\bar{X}-160}{0.1}$ とおくと、標本数は十分に大きいため、 Y は標準正規分布に従うとみなせる。また、

$$\begin{aligned} |\bar{X}-160| &\leq 0.2 \\ \Leftrightarrow -0.2 &\leq \bar{X}-160 \leq 0.2 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq \frac{\bar{X}-160}{0.1} \leq 2 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq Y \leq 2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}-160| \leq 0.2) &= P(-2 \leq Y \leq 2) \\ &= 2P(0 \leq Y \leq 2) \end{aligned}$$

と表される。ゆえに、

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}-160| \geq 0.2) &= 1 - 2P(0 \leq Y \leq 2) \\ &= 1 - 2 \cdot 0.4772 \\ &= 0.0456 \end{aligned}$$

であり、小数第3位を四捨五入すると、0.05である。

(答) $\bar{X}$ の平均160cm、標準偏差0.1cm、 $|\bar{X}-160| \leq 0.2$ となる確率0.05

〔 4 〕 【 C 】

(1)

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が虚数解 $x=2+i$ を持つとき、共役な虚数 $2-i$ も解である。残り 1 つの実数解を α とおく。このとき、3 次方程式の解と係数の関係より、以下の 3 式が成り立つ。

$$\begin{cases} -a=(2+i)+(2-i)+\alpha \\ b=(2+i)(2-i)+(2+i)\alpha+(2-i)\alpha \\ -c=\alpha(2+i)(2-i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\alpha-4 \\ b=4\alpha+5 \\ c=-5\alpha \end{cases}$$

さらに、 $\alpha=-a-4$ を下 2 つの式に代入すると、

$$\begin{aligned} b &= 4(-a-4)+5 \\ &= -4a-11 \\ c &= -5(-a-4) \\ &= 5a+20 \end{aligned}$$

となる。

(答) $b=-4a-11, c=5a+20$

(2)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ の $x=2$ における微分係数は $f'(2)$ で表される。また、(1)より $b=-4a-11$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b \\ &= 4a + (-4a-11) + 12 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) 1

(3)

(1)より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\ &= 3x^2 + 2ax - 4a - 11 \end{aligned}$$

と表される。 $f(x)$ が $x>2$ で極小値をとる条件は、 $f'(x)$ が $x>2$ で負から正になるときである。これについて、条件を満たす a の範囲を考える。はじめに、 $f'(x)$ が異なる実数解を持つ必要があり、 $f'(x)$ の判別式を D とおくと、 $D>0$ であればよい。

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^2 - 3 \cdot (-4a - 11) \\ &= a^2 + 12a + 33 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} a^2 + 12a + 33 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< -6 - \sqrt{3}, -6 + \sqrt{3} < a \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

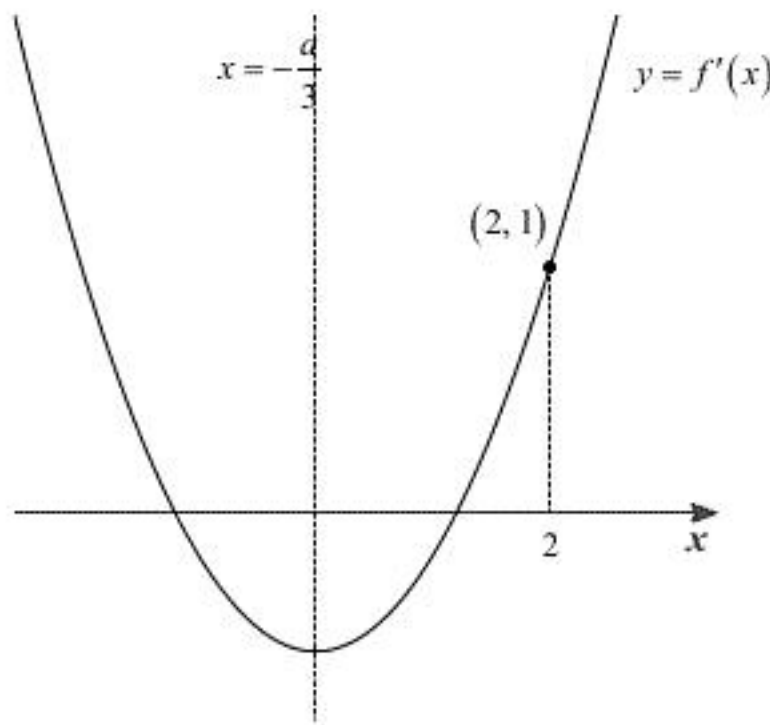
となる。次に、 $y=f'(x)$ の軸について、

$$f'(x) = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} - 4a - 11$$

より、軸は $x=-\frac{a}{3}$ である。この軸と $x=2$ の関係を考える。ここで、(2)より $f'(2)=1$ である

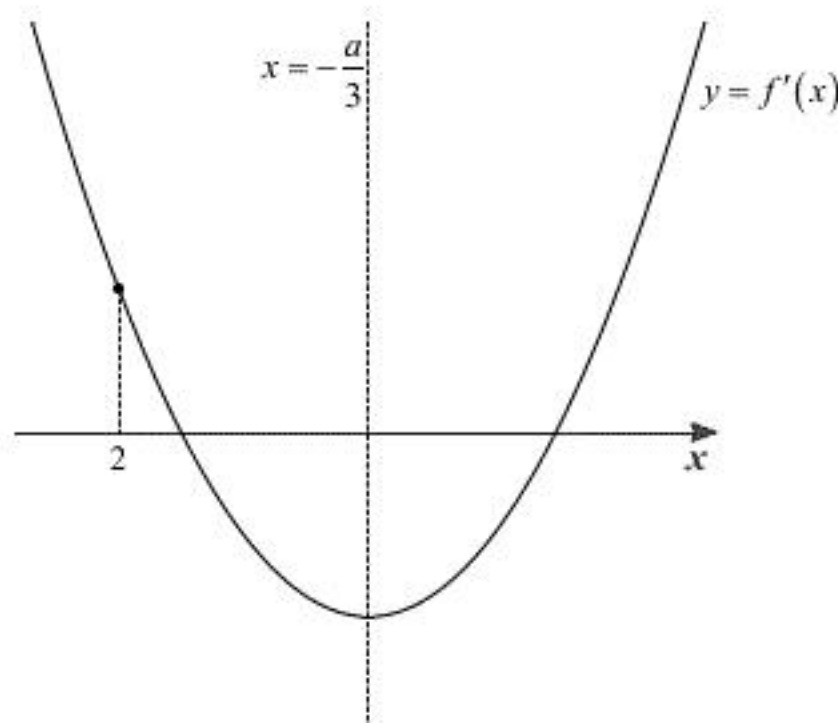
から、 $x=2$ は除外して考えてよい。

[1] $-\frac{a}{3} < 2 \Leftrightarrow a > -6$ のとき



$a > -6$ かつ $\textcircled{1}$ の範囲では、 $x>2$ で $f'(x)=0$ を満たす解は存在しないため、不適である。

[2] $-\frac{a}{3} > 2 \Leftrightarrow a < -6$ のとき



$a < -6$ かつ $\textcircled{1}$ の範囲では $f'(x)=0$ を満たす x が常に存在する。

以上[1], [2]より、 $f'(x)$ が $x>2$ で極小値をとる a の値の範囲は、

$$a < -6 - \sqrt{3}$$

である。

(答) $a < -6 - \sqrt{3}$

〔 4 〕 【 D 】

(1)

容器の $y=k$ における断面は円であり、その半径は

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \log x \\ \Leftrightarrow x &= e^{2k} \end{aligned}$$

より、 e^{2k} である。よって $y=k$ における断面積 $S(k)$ は、

$$\begin{aligned} S(k) &= (e^{2k})^2 \cdot \pi \\ &= \pi e^{4k} \end{aligned}$$

である。したがって、容器の底から高さ h まで注水した時の水の体積 $V(h)$ は、

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h S(k) dk \\ &= \pi \int_0^h e^{4k} dk \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4k} \right]_0^h \\ &= \frac{\pi}{4} (e^{4h} - 1) \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{4} (e^{4h} - 1)$

(2)

時刻 t において、注水された水は $2\pi t$ である。(1)より、 $V(h)=2\pi t$ となるとき h の値を求めればよいから、

$$\begin{aligned} V(h) &= 2\pi t \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} (e^{4h} - 1) &= 2\pi t \\ \Leftrightarrow e^{4h} &= 8t + 1 \\ \Leftrightarrow h &= \frac{1}{4} \log(8t + 1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4} \log(8t + 1)$

(3)

$h(t)=\frac{1}{4} \log(8t+1)$ とおくと、時刻 t における水面が上昇する速さは $h'(t)$ であるから、

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8t+1} \cdot (8t+1)' \\ &= \frac{2}{8t+1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{8t+1}$