

(1)

余弦定理により,

$$\begin{aligned} BC^2 &= m^2 + n^2 - 2mn \cos 60^\circ \\ &= m^2 + n^2 - mn \end{aligned}$$

$$\therefore BC = \sqrt{m^2 + n^2 - mn} (> 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad BC = \sqrt{m^2 + n^2 - mn}$$

(2)

正弦定理により,

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin 60^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{BC}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - mn}{3}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad R = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - mn}{3}}$$

(3)

$\triangle ABC$ の外接円の面積は,

$$\pi R^2 = \frac{\pi}{3} (m^2 + n^2 - mn)$$

である。さいころの目 (m, n) の出方は 36 通りあり, それぞれが等確率で起こる。ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 (m^2 + n^2 - mn) &= \sum_{m=1}^6 \left(6m^2 + \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - m \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \right) \\ &= \sum_{m=1}^6 (6m^2 - 21m + 91) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - 21 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 + 91 \cdot 6 \\ &= 651 \end{aligned}$$

であるから, 求める期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{36} \cdot 651 \\ &= \frac{217}{36} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad E = \frac{217}{36} \pi$$

(i)より、放物線 $y = x^2 + 2kx + 4k - 1$ は x 軸と共有点を持たない。この必要十分条件は方程式 $x^2 + 2kx + 4k - 1 = 0$ の判別式 D が 0 より小さいことなので

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow 4k^2 - 4(4k - 1) &< 0 \\ \Leftrightarrow 4(k^2 - 4k + 1) &< 0 \\ \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < k < 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。また、(ii)の不等式はそれぞれ

$$\begin{aligned} x^2 - x &\geq 6 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \geq 3, x \leq -2 \\ |x - 1| &< k \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -k + 1 < x < k + 1 \\ k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

と変形できる。条件よりこれが解をもたないので

$$\begin{aligned} k + 1 \leq 3 \text{ かつ } -k + 1 \geq -2 \text{ かつ } k > 0 \\ \Leftrightarrow 0 < k \leq 2 \end{aligned}$$

を得る。以上より、(i)、(ii)を同時に満たす k の範囲は

$$2 - \sqrt{3} < k \leq 3$$

とわかる。

(答) $2 - \sqrt{3} < k \leq 3$

(1)

 C_1 の方程式を x で微分すると

$$y' = -2x + 4$$

となる。よって、 l_1 の方程式は

$$y - (-a^2 + 4a) = (-2a + 4)(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = (-2a + 4)x + a^2$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad y = (-2a + 4)x + a^2$$

(2)

(1)より

$$b_1 = a^2$$

である。 l_2 の傾きは l_1 に等しく、 C_2 の方程式の導関数は $y' = 2x$ なので、 C_2 と l_1 の接点の x 座標は

$$2x = -2a + 4$$

$$\Leftrightarrow x = -a + 2$$

であるから、 l_2 の方程式は

$$y - \{(-a + 2)^2 - 2\} = (-2a + 4)(x + a - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = (-2a + 4)x - a^2 + 4a - 6$$

となり

$$b_2 = -a^2 + 4a - 6$$

である。従って

$$b_1 - b_2 = a^2 - (-a^2 + 4a - 6)$$

$$= 2(a - 1)^2 + 4$$

より、 $b_1 - b_2$ は $a = 1$ のとき最小値4をとる。

$$(\text{答}) \quad a = 1 \text{ のとき最小値 } 4$$

(3)

 $a = 1$ のとき

$$l_1 : y = 2x + 1$$

$$C_2 : y = x^2 - 2$$

であるから、 l_1 と C_1 の交点の x 座標は

$$2x + 1 = x^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 3$$

である。従って、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \{(2x + 1) - (x^2 - 2)\} dx &= \int_{-1}^3 \{-(x + 1)(x - 3)\} dx \\ &= \frac{1}{6} \{3 - (-1)\}^3 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{32}{3}$$