

(1)

整数 a, b, c, d を用いて、 $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ とおける。これより

$$\begin{aligned} xy &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 \\ &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 \\ &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 \end{aligned}$$

と表せる。 $ac + bd, bc - ad$ は整数なので、 xy も A に属する。

(証明終)

(2)

2 整数 m, n を用いて

$$\begin{aligned} p &= 5m + 1 \\ q &= 5n + 2 \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{p^2 + q^2}{5} &= \frac{(5m+1)^2 + (5n+2)^2}{5} \\ &= 5m^2 + 2m + 5n^2 + 4n + 1 \\ &= 4m^2 - 4mn + n^2 + m^2 + 4n^2 + 1 + 4mn + 4n + 2m \\ &= (2m - n)^2 + (m + 2n + 1)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $2m - n, m + 2n + 1$ は整数なので $\frac{p^2 + q^2}{5}$ は A に属する。

(証明終)

(3)

ある整数 a について、5 で割った余りと a^2 を 5 で割った余りとの関係は下のようになる。

a を 5 で割った余り	a^2 を 5 で割った余り
1	1
2	4
3	4
4	1
0	0

ある整数 a, b を用いて $n = a^2 + b^2$ と表せたとき、 a と b は 5 で割ると

- [1] 1 余るものと 2 余るものの組合せ
- [2] 1 余るものと 3 余るものの組合せ
- [3] 2 余るものと 4 余るものの組合せ
- [4] 3 余るものと 4 余るものの組合せ
- [5] とともに 5 で割り切れる組合せ

に場合分けできる。以下、 α, β は整数とする。

[1] a と b が 1 余るものと 2 余るものの組合せのとき

(2) より $\frac{n}{5}$ も A に属する。

[2] a と b が 1 余るものと 3 余るものの組合せのとき

$a = 5\alpha + 1, b = 5\beta + 3$ と表すと

$$\begin{aligned} \frac{n}{5} &= \frac{a^2 + b^2}{5} \\ &= 5\alpha^2 + 2\alpha + 5\beta^2 + 6\beta + 2 \\ &= (2\beta - \alpha + 1)^2 + (2\alpha + \beta + 1)^2 \end{aligned}$$

と変形できるので、 $\frac{n}{5}$ も A に属する。

[3] a と b が 2 余るものと 4 余るものの組合せのとき

$a = 5\alpha + 2, b = 5\beta + 4$ と表すと、同様にして

$$\frac{n}{5} = (\beta - 2\alpha)^2 + (\alpha + 2\beta + 2)^2$$

と変形できるので、 $\frac{n}{5}$ も A に属する。

[4] a と b が 3 余るものと 4 余るものの組合せのとき

$a = 5\alpha + 3, b = 5\beta + 4$ と表すと、同様にして

$$\frac{n}{5} = (2\beta - \alpha + 1)^2 + (2\alpha + \beta + 2)^2$$

と変形できるので、 $\frac{n}{5}$ も A に属する。

[5] a と b がともに 5 で割り切れる組合せのとき

$a = 5\alpha, b = 5\beta$ と表すと、同様にして

$$\frac{n}{5} = (2\alpha - \beta)^2 + (\alpha + 2\beta)^2$$

と変形できるので、 $\frac{n}{5}$ も A に属する。

以上[1]から[5]より、 A に属する自然数 n が 5 の倍数であるとき、 $\frac{n}{5}$ も A に属する。

(証明終)

2

(1)

正 n 角形の内角の和は $(n-2) \times \pi$ なので、正 n 角形の1つの内角の大きさは $\frac{n-2}{n} \cdot \pi$ である。従って外角の大きさは

$$\begin{aligned}\theta &= \pi - \frac{n-2}{n} \cdot \pi \\ &= \frac{2\pi}{n}\end{aligned}$$

である。また、 $n \geq 7$ より

$$0 < \frac{2\pi}{n} < \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

であるから

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{3} &< \cos \theta < \cos 0 \\ \therefore \frac{1}{2} &< \cos \theta < 1\end{aligned}$$

より $\cos \theta > \frac{1}{2}$ が示された。

(証明終)

$$(答) \quad \theta = \frac{2\pi}{n}$$

(2)

$\overrightarrow{B_1B_2}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1B_2} &= \overrightarrow{A_1B_2} - \overrightarrow{A_1B_1} \\ &= (\overrightarrow{A_2B_2} - \overrightarrow{A_2A_1}) - \overrightarrow{A_1B_1}\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで問題文の条件から

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2A_3}$$

となる。

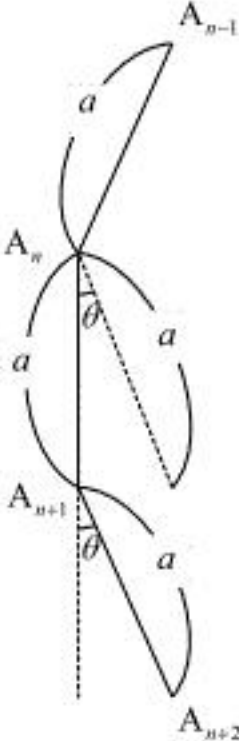
$$(答) \quad \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2A_3}$$

(3)

(2)を用いて

$$\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_2A_3} \cdot \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} - \left| \overrightarrow{A_2A_3} \right|^2$$

となる。



ここで、前図より

$$\overrightarrow{A_nA_{n+1}} \cdot \overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} = a^2 \cos \theta$$

となる。従って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} &= a^2 \cos \theta + a^2 \cos \theta - a^2 \\ &= 2a^2 \cos \frac{2\pi}{n} - a^2\end{aligned}$$

が得られる。

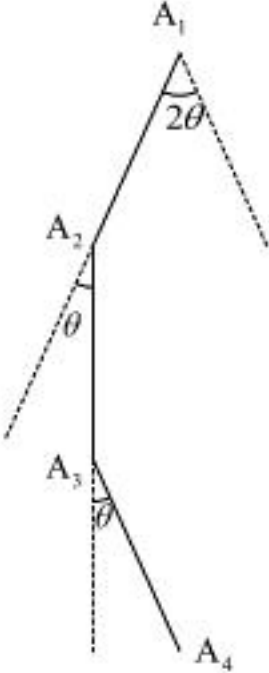
$$(答) \quad \overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = 2a^2 \cos \frac{2\pi}{n} - a^2$$

(4)

(2)より

$$\begin{aligned}\left| \overrightarrow{B_1B_2} \right|^2 &= (\overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2A_3})^2 \\ &= \left| \overrightarrow{A_3A_4} \right|^2 + \left| \overrightarrow{A_1A_2} \right|^2 + \left| \overrightarrow{A_2A_3} \right|^2 + 2\overrightarrow{A_3A_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} - 2\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} - 2\overrightarrow{A_2A_3} \cdot \overrightarrow{A_3A_4} \\ &= 3a^2 - 4a^2 \cos \theta + 2\overrightarrow{A_3A_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}\end{aligned}$$

となる。



前図より

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_3A_4} = a^2 \cos 2\theta$$

がわかる。従って

$$\begin{aligned}\left| \overrightarrow{B_1B_2} \right|^2 &= 3a^2 - 4a^2 \cos \theta + 2a^2 \cos 2\theta \\ &= 3a^2 - 4a^2 \cos \theta + 2a^2 (2a^2 \cos^2 - 1) \\ &= \{a(2 \cos \theta - 1)\}^2\end{aligned}$$

となるが、(1)より $\cos \theta > \frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned}\left| \overrightarrow{B_1B_2} \right| &= a(2 \cos \theta - 1) \\ &= a \left(2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1 \right)\end{aligned}$$

とわかる。

$$(答) \quad \left| \overrightarrow{B_1B_2} \right| = a \left(2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1 \right)$$

3

(1)

直線 AP の傾きは $x_0 \neq -1$ のとき $\frac{y_0}{x_0+1}$ なので、 $y_0 \neq 0$ のとき求める直線の傾きは $-\frac{x_0+1}{y_0}$ であ

る。また、求める直線は線分 AP の中点 $\left(\frac{x_0-1}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ を通るので

$$\begin{aligned} y &= -\frac{x_0+1}{y_0} \left(x - \frac{x_0-1}{2} \right) + \frac{y_0}{2} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{x_0+1}{y_0} x + \frac{x_0^2+y_0^2-1}{2y_0} \\ \therefore 2(x_0+1)x + 2y_0y - x_0^2 + y_0^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。また、 $y_0 = 0$ のとき求める直線は、 y 軸に平行で線分 AP の中点 $\left(\frac{x_0-1}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ を通るので

$$x = \frac{x_0-1}{2}$$

である。いずれの場合も、求める方程式は

$$2(x_0+1)x + 2y_0y - x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$$

となる。

(答) $2(x_0+1)x + 2y_0y - x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$

(2)

$y_0 \neq 0$ のとき、直線 BP の傾きは $x_0 \neq 1$ のとき $\frac{y_0}{x_0-1}$ で、点 B を通るので直線 BP の方程式は

$$y = \frac{y_0}{x_0-1}(x-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。これと(1)の答えより

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{x_0-1}(X-1) &= -\frac{x_0+1}{y_0}X + \frac{x_0^2+y_0^2-1}{2y_0} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{y_0}{x_0-1} + \frac{x_0+1}{y_0} \right) X &= \frac{x_0^2+y_0^2-1}{2y_0} + \frac{y_0}{x_0-1} \\ \therefore 2(y_0^2+x_0^2-1)X &= (x_0-1)(x_0^2+y_0^2-1) + 2y_0^2 \\ \Leftrightarrow 2(y_0^2+x_0^2-1)X &= (x_0+1)\{(x_0-1)^2+y_0^2\} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、点 P は円 C 上の点なので

$$\begin{aligned} (x_0-1)^2 + y_0^2 &= r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \\ \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 &= r^2 + 2x_0 - 1 \end{aligned}$$

を得る。これを②に代入して

$$\begin{aligned} 2(r^2+2x_0-1-1)X &= (x_0+1)r^2 \\ \Leftrightarrow (4X-r^2)x_0 &= r^2-2r^2X+4X \\ \therefore x_0 &= \frac{r^2-2r^2X+4X}{4X-r^2} \end{aligned}$$

とわかる。①より $Y = \frac{y_0}{x_0-1}(X-1)$ なので

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{x_0-1}{X-1}Y \\ &= \frac{1}{X-1} \cdot \frac{r^2-2r^2X+4X-4X+r^2}{4X-r^2} \cdot Y \\ &= \frac{2r^2Y}{r^2-4X} \end{aligned}$$

とわかる。また、 $x_0 = 1$ のとき $y_0 = \pm r$ である。これより $X = 1$ であり、以下複合同順とすると、

(1)の答えより $Y = \mp \frac{2}{r} \pm \frac{r}{2}$ である。これを求めた答えに代入すると

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{r^2-2r^2+4}{4-r^2} \\ &= 1 \\ y_0 &= \frac{2r^2\left(\mp \frac{2}{r} \pm \frac{r}{2}\right)}{r^2-4} \\ &= \pm r \end{aligned}$$

となり、 $x_0 = 1$ の場合も成り立つ。 $y_0 = 0$ のとき $x_0 = 1 \pm r$ である。これより $Y = 0$ であり、(1)

の答えより $X = \pm \frac{r}{2}$ である。これを求めた答えに代入すると

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{r^2-2r^2\left(\pm \frac{r}{2}\right)+4\left(\pm \frac{r}{2}\right)}{4\left(\pm \frac{r}{2}\right)-r^2} \\ &= 1 \pm r \\ y_0 &= \frac{2r^2 \cdot 0}{r^2-4\left(\pm \frac{r}{2}\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、 $y_0 = 0$ のときも成り立つ。従って求める答えは

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{r^2-2r^2X+4X}{4X-r^2} \\ y_0 &= \frac{2r^2Y}{r^2-4X} \end{aligned}$$

である。

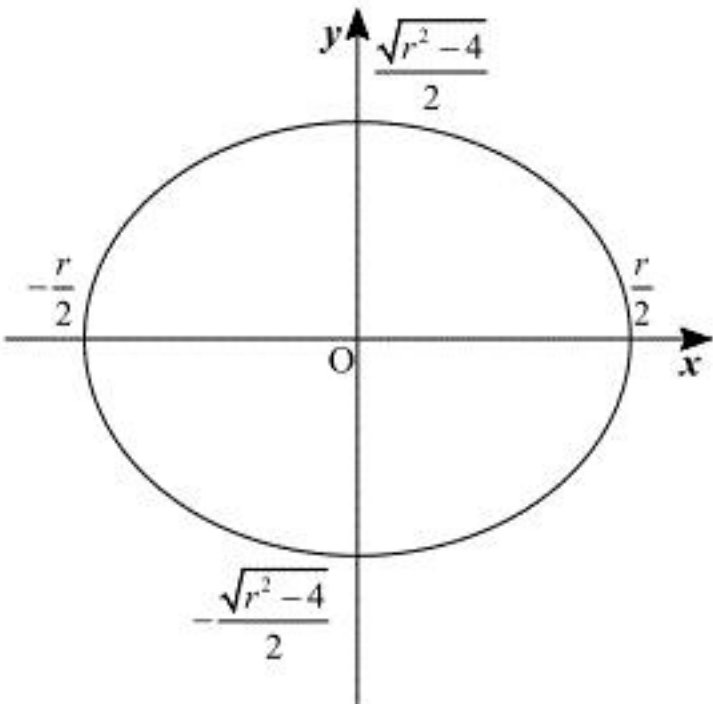
(答) $x_0 = \frac{r^2-2r^2X+4X}{4X-r^2}, y_0 = \frac{2r^2Y}{r^2-4X}$

(3)

③に(2)の答えを代入して

$$\begin{aligned} (x_0-1)^2 + y_0^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{2r^2(1-X)}{4X-r^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{2r^2Y}{r^2-4X} \right\}^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow 4r^2 \left\{ (1-X^2) + Y^2 \right\} &= (r^2-4X)^2 \\ \Leftrightarrow 4r^2Y^2 &= r^4-8r^2X+16X^2 \\ \Leftrightarrow 4r^2Y^2 &= (r^2-4)(r^2-4X^2) \\ \Leftrightarrow \frac{Y^2}{r^2-4} &= \frac{1}{4} - \frac{X^2}{r^2} \\ \Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{Y}{\left(\frac{\sqrt{r^2-4}}{2}\right)^2} &= 1 \end{aligned}$$

となる。従ってこの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(1)

曲線 C の方程式 $y = 2\log x - 1$ を、 x で微分すると

$$y' = \frac{2}{x}$$

である。曲線 C の点 P における接線の方程式は

$$y = \frac{2}{p}(x - p) + 2\log p - 1$$

$$\therefore y = \frac{2}{p}x + 2\log p - 3$$

である。従って接線と x 軸の交点 A の x 座標は

$$\frac{2}{p}x + 2\log p - 3 = 0$$

$$\therefore x = (3 - 2\log p) \cdot \frac{p}{2}$$

である。これが正になれば良いので

$$(3 - 2\log p) \cdot \frac{p}{2} > 0$$

を得る。ここで真数条件より $p > 0$ なので

$$3 - 2\log p > 0$$

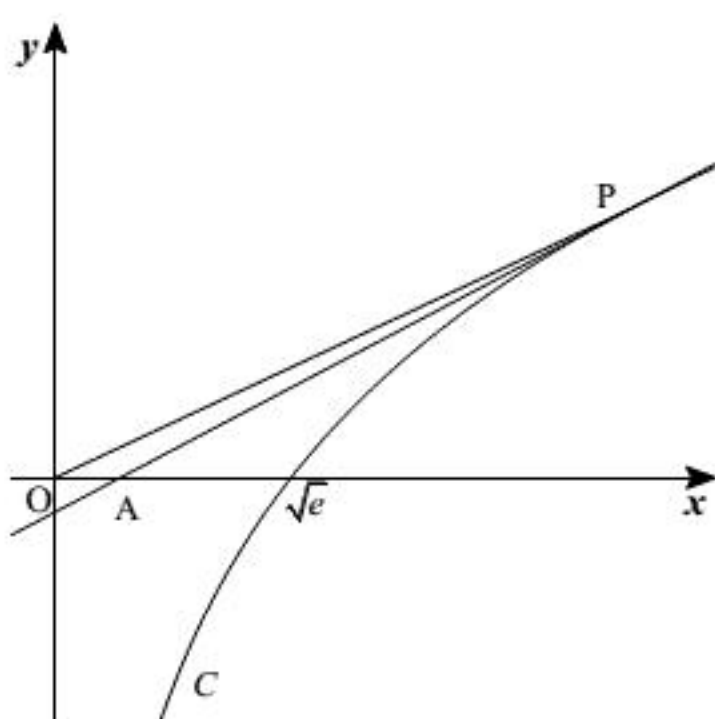
$$\Leftrightarrow \log p < \frac{3}{2}$$

$$\therefore 0 < p < e^{\frac{3}{2}}$$

となる。

(答) $0 < p < e^{\frac{3}{2}}$

(2)



上図より、(1)のもとで P が第1象限にあるとき

$$e^{\frac{1}{2}} < p < e^{\frac{3}{2}}$$

である。(1)より A の座標は $\left(\frac{p}{2}(3 - \log p), 0\right)$ であるので、 $\triangle OAP$ の面積は

$$S(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} (3 - 2\log p) (2\log p - 1)$$

$$= \frac{p}{4} (3 - 2\log p) (2\log p - 1)$$

と表せる。これを p で微分して

$$S'(p) = -\frac{1}{4} \{4(\log p)^2 - 5\}$$

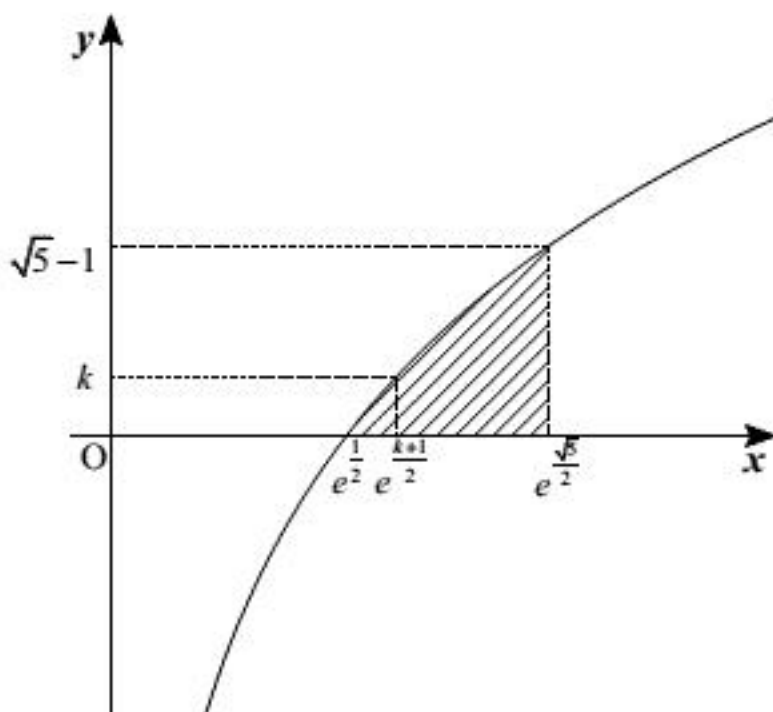
である。これより増減表を書くと下のようになる。

p	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$
$S'(p)$		$+$	0	$-$	
$S(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

従って、 $S(p)$ を最大にする p は $p = e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ である。

(答) $p = e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

(3)



$y = 2\log x - 1$ より $x = e^{\frac{y+1}{2}}$ となり、回転体の $y = k$ での断面積 $f(k)$ は

$$f(k) = \pi \left\{ \left(e^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \right)^2 - \left(e^{\frac{k+1}{2}} \right)^2 \right\}$$

である。 $0 \leq k \leq \sqrt{5} - 1$ なので、求める体積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{5}-1} f(k) dk &= \pi \int_0^{\sqrt{5}-1} \left\{ \left(e^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \right)^2 - \left(e^{\frac{k+1}{2}} \right)^2 \right\} dk \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{5}-1} (e^{\sqrt{5}} - e^{k+1}) dk \\ &= \pi [e^{\sqrt{5}} k - e^{k+1}]_0^{\sqrt{5}-1} \\ &= \pi \{ (\sqrt{5} - 2)e^{\sqrt{5}} + e \} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\pi \{ (\sqrt{5} - 2)e^{\sqrt{5}} + e \}$