

1

(1)

余弦定理により,

$$\begin{aligned} BC^2 &= m^2 + n^2 - 2mn \cos 60^\circ \\ &= m^2 + n^2 - mn \end{aligned}$$

$$\therefore BC = \sqrt{m^2 + n^2 - mn} (> 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad BC = \sqrt{m^2 + n^2 - mn}$$

(2)

正弦定理により,

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin 60^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{BC}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - mn}{3}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad R = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - mn}{3}}$$

(3)

 $\triangle ABC$ の外接円の面積は,

$$\pi R^2 = \frac{\pi}{3} (m^2 + n^2 - mn)$$

である。さいころの目 (m, n) の出方は 36 通りあり, それぞれが等確率で起こる。ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 (m^2 + n^2 - mn) &= \sum_{m=1}^6 \left(6m^2 + \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - m \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \right) \\ &= \sum_{m=1}^6 (6m^2 - 21m + 91) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - 21 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 + 91 \cdot 6 \\ &= 651 \end{aligned}$$

であるから, 求める期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{36} \cdot 651 \\ &= \frac{217}{36} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad E = \frac{217}{36} \pi$$

2

(1)

$$|\vec{a} + p\vec{b}| = p|\vec{b}|$$

の両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + 2p\vec{a} \cdot \vec{b} + p^2|\vec{b}|^2 &= p^2|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 2p\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + 2p \cdot \left(-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &= p|\vec{a}||\vec{b}| \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{a}| = p|\vec{b}| \quad (\because |\vec{a}| \neq 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{a}| = p|\vec{b}|$$

(2)

$(\vec{a} + p\vec{b}) \perp (\vec{a} - q\vec{b})$ より、

$$\begin{aligned} (\vec{a} + p\vec{b}) \cdot (\vec{a} - q\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + (p-q)\vec{a} \cdot \vec{b} - pq|\vec{b}|^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、①、②を代入すると

$$\begin{aligned} p^2|\vec{b}|^2 + (p-q)\left(-\frac{1}{2}p|\vec{b}|^2\right) - pq|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p - \frac{1}{2}(p-q) - q &= 0 \quad (\because p|\vec{b}|^2 \neq 0) \\ \therefore q &= p \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad q = p$$

(3)

$|\vec{a}| = 1$, ②より $|\vec{b}| = \frac{1}{p}$ を得る。これらと①、 $p = q$ を用いると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{s}{p}\vec{a} + \frac{q}{s}\vec{b} \right|^2 &= \frac{s^2}{p^2}|\vec{a}|^2 + 2 \cdot \frac{q}{p}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{q^2}{s^2}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{s^2}{p^2} - |\vec{a}||\vec{b}| + \frac{p^2}{s^2} \cdot \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{s^2}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

となる。 $s > 0, p > 0$ より、 $\frac{s^2}{p^2} > 0, \frac{1}{s^2} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係を用いると

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{p^2} + \frac{1}{s^2} &\geq 2\sqrt{\frac{s^2}{p^2} \cdot \frac{1}{s^2}} = \frac{2}{p} \\ \therefore \left| \frac{s}{p}\vec{a} + \frac{q}{s}\vec{b} \right|^2 &\geq \frac{2}{p} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

となる。等号成立は、

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{p^2} &= \frac{1}{s^2} \\ \therefore s &= \sqrt{p} \quad (\because s > 0, p > 0) \end{aligned}$$

のときである。以上より、 $\left| \frac{s}{p}\vec{a} + \frac{q}{s}\vec{b} \right|$ の最小値は $\frac{1}{\sqrt{p}}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} p = q, \frac{1}{\sqrt{p}} &= \frac{1}{4} \\ \therefore p = 16, q &= 16 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad p = 16, q = 16$$

3

(1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

とする。①-②より

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2} \{y^2 - (y-b)^2\} &= 0 \\ \Leftrightarrow b(2y-b) &= 0 \\ \therefore y = \frac{b}{2} = \frac{1-a}{2} \quad (\because b \neq 0, a+b=1) \end{aligned}$$

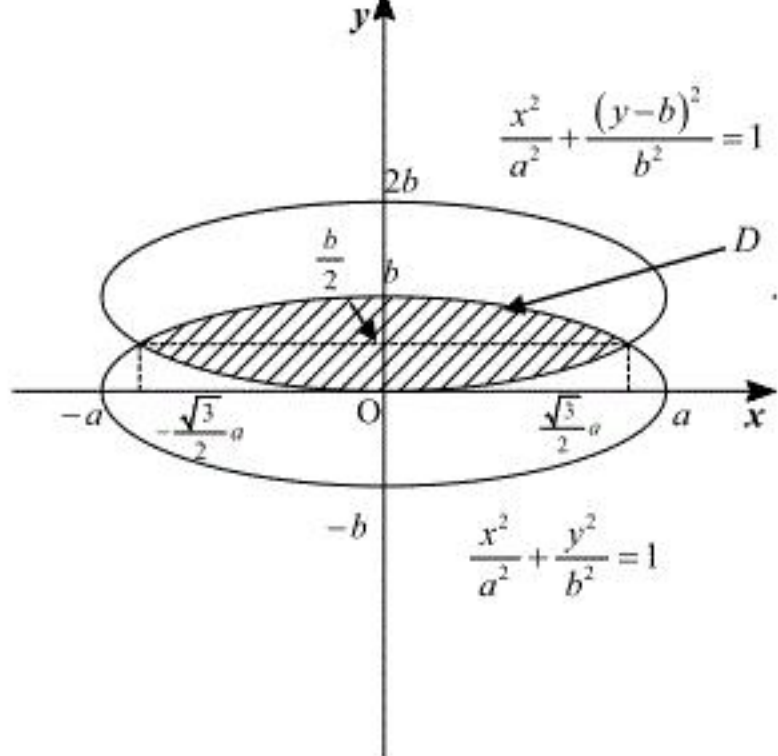
となる。これを①に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4} &= 1 \\ \therefore x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{aligned}$$

を得る。以上より、2つの楕円の交点は点 $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} a, \frac{1-a}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \text{ 点 } \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} a, \frac{1-a}{2}\right)$$

(2)



対称性より、 D を直線 $y = \frac{b}{2}$ で分けたとき、上側の部分と下側の部分の面積は等しい。また、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

より、 D の境界で、上側の部分の方程式は $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ である。以上より、 D の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2} a}^{\frac{\sqrt{3}}{2} a} \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{2} \right) dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} a} \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx - \sqrt{3} ab \end{aligned}$$

である（被積分関数が偶関数であることを用いた）。ここで、 $x = a \sin \theta$ とおくと

$$\begin{array}{c|c|c} dx & a \cos \theta d\theta, \\ \hline x & 0 & \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ \hline \theta & 0 & \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} \cdot a \cos \theta d\theta - \sqrt{3} ab \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta - \sqrt{3} ab \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta - \sqrt{3} ab \\ &= 2ab \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \sqrt{3} ab \\ &= 2ab \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \sqrt{3} ab \\ &= \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a(1-a) \quad (\because a+b=1) \end{aligned}$$

となる。よって、 $a(1-a)$ が最大となるとき、 S は最大となる。

$$\begin{aligned} a(1-a) &= -a^2 + a \\ &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

で、 $0 < a < 1$ より、 $a(1-a)$ は $a = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。したがって、 D の面積 S は $a = \frac{1}{2}$ で

最大値 $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ をとる。

$$(\text{答}) \text{ } D \text{ の面積 } \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a(1-a), \quad a = \frac{1}{2} \text{ で最大値 } \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(3)

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow y = b \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

より、 D の境界で、下側の部分の方程式は $y = b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ である。したがって、 D を x 軸

のまわりに一回転させてできる回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2} a}^{\frac{\sqrt{3}}{2} a} \left\{ \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - \left(b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2} a}^{\frac{\sqrt{3}}{2} a} \left(\frac{2b^2}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - b^2 \right) dx \\ &= \frac{4b^2 \pi}{a} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} a} \sqrt{a^2 - x^2} dx - \sqrt{3} ab^2 \pi \end{aligned}$$

となる。ここで、(2)より

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} a} \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx = \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} V &= 4b\pi \cdot \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \sqrt{3} ab^2 \pi \\ &= \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \pi a(1-a)^2 \end{aligned}$$

となる。よって、 $a(1-a)^2$ が最大となるとき、 V は最大となる。

$$f(a) = a(1-a)^2 = a^3 - 2a^2 + a$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(a) &= 3a^2 - 4a + 1 \\ &= (3a-1)(a-1) \end{aligned}$$

より、 $f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	(0)	...	$\frac{1}{3}$	...	(1)
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

したがって、 $f(a)$ の最大値は $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$ であるから、 V は $a = \frac{1}{3}$ で最大値

$$\frac{4}{27} \pi \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

をとる。

$$(\text{答}) \text{ 体積 } \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \pi a(1-a)^2, \quad a = \frac{1}{3} \text{ で最大値 } \frac{4}{27} \pi \left(\frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$