

(1)

余弦定理により,

$$\begin{aligned} BC^2 &= m^2 + n^2 - 2mn \cos 60^\circ \\ &= m^2 + n^2 - mn \end{aligned}$$

$$\therefore BC = \sqrt{m^2 + n^2 - mn} (> 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad BC = \sqrt{m^2 + n^2 - mn}$$

(2)

正弦定理により,

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - mn}{3}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad R = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - mn}{3}}$$

(3)

$\triangle ABC$ の外接円の面積は,

$$\pi R^2 = \frac{\pi}{3} (m^2 + n^2 - mn)$$

である。さいころの目 (m, n) の出方は 36 通りあり、それぞれが等確率で起こる。ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 (m^2 + n^2 - mn) &= \sum_{m=1}^6 \left(6m^2 + \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - m \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \right) \\ &= \sum_{m=1}^6 (6m^2 - 21m + 91) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - 21 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 + 91 \cdot 6 \\ &= 651 \end{aligned}$$

であるから、求める期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{36} \cdot 651 \\ &= \frac{217}{36} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad E = \frac{217}{36} \pi$$

(1)

$$|\vec{a} + p\vec{b}| = p|\vec{b}|$$

の両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + 2p\vec{a} \cdot \vec{b} + p^2|\vec{b}|^2 &= p^2|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 2p\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + 2p \cdot \left(-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &= p|\vec{a}||\vec{b}| \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{a}| = p|\vec{b}| \quad (\because |\vec{a}| \neq 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{a}| = p|\vec{b}|$$

(2)

$(\vec{a} + p\vec{b}) \perp (\vec{a} - q\vec{b})$ より、

$$\begin{aligned} (\vec{a} + p\vec{b}) \cdot (\vec{a} - q\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + (p-q)\vec{a} \cdot \vec{b} - pq|\vec{b}|^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、①、②を代入すると

$$\begin{aligned} p^2|\vec{b}|^2 + (p-q)\left(-\frac{1}{2}p|\vec{b}|^2\right) - pq|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p - \frac{1}{2}(p-q) - q &= 0 \quad (\because p|\vec{b}|^2 \neq 0) \\ \therefore q &= p \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad q = p$$

(3)

$|\vec{a}| = 1$, ②より $|\vec{b}| = \frac{1}{p}$ を得る。これらと①, $p = q$ を用いると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{s}{p}\vec{a} + \frac{q}{s}\vec{b} \right|^2 &= \frac{s^2}{p^2}|\vec{a}|^2 + 2 \cdot \frac{q}{p}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{q^2}{s^2}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{s^2}{p^2} - |\vec{a}||\vec{b}| + \frac{p^2}{s^2} \cdot \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{s^2}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

となる。 $s > 0, p > 0$ より, $\frac{s^2}{p^2} > 0, \frac{1}{s^2} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係を用いると

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{p^2} + \frac{1}{s^2} &\geq 2\sqrt{\frac{s^2}{p^2} \cdot \frac{1}{s^2}} = \frac{2}{p} \\ \therefore \left| \frac{s}{p}\vec{a} + \frac{q}{s}\vec{b} \right|^2 &\geq \frac{2}{p} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

となる。等号成立は、

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{p^2} &= \frac{1}{s^2} \\ \therefore s &= \sqrt{p} \quad (\because s > 0, p > 0) \end{aligned}$$

のときである。以上より、 $\left| \frac{s}{p}\vec{a} + \frac{q}{s}\vec{b} \right|$ の最小値は $\frac{1}{\sqrt{p}}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} p = q, \frac{1}{\sqrt{p}} &= \frac{1}{4} \\ \therefore p = 16, q &= 16 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad p = 16, q = 16$$

(1)

与式は

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos x + b \sin 2x \\ &= a \cos x + 2b \sin x \cos x \\ &= \cos x (a + 2b \sin x) \end{aligned}$$

と変形できる。また、 $f(x)$ を x で微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= -a \sin x + 2b \cos 2x \\ &= -a \sin x + 2b (1 - 2 \sin^2 x) \\ &= -4b \sin^2 x - a \sin x + 2b \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{6}$ で極値をとるので、 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ である。従って

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -b - \frac{1}{2}a + 2b &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2b \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos x (a \sin x + 2b \sin^2 x) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} a \sin^2 x + \frac{2}{3} b \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} a + \frac{2}{3} b \end{aligned}$$

であるから問題文の条件より

$$\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b = 1 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。①と②を解いて

$$a = \frac{6}{5}, b = \frac{3}{5}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad a = \frac{6}{5}, b = \frac{3}{5}$$

(2)

$f'(x)$ に(1)の答えを代入して

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{12}{5} \sin^2 x - \frac{6}{5} \sin x + \frac{6}{5} \\ &= -\frac{6}{5} (2 \sin^2 x + \sin x - 1) \\ &= -\frac{6}{5} (\sin x + 1) (2 \sin x - 1) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq 2\pi$ で $f'(x) = 0$ となるのは

$$\begin{aligned} \sin x &= -1, \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

のときである。増減表を書くと下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

従って、 $x = \frac{5}{6}\pi$ のとき極小値 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{10}$ をとる。また、 $x = \frac{\pi}{6}$ のとき極大値 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{10}$ をとる。

$$\text{(答)} \quad \text{極小値: } x = \frac{5}{6}\pi \text{ のとき } -\frac{9\sqrt{3}}{10}$$

$$\text{極大値: } x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } \frac{9\sqrt{3}}{10}$$

(1)

問題文より

$$\begin{aligned}
 f_0(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\
 &= [\log(1+t)]_0^x \\
 &= \log(1+x)
 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $f_0(x) = \log(1+x)$

(2)

 $t \geq 0$ の範囲において, $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ となるので

$$\begin{aligned}
 |f_n(x)| &= \left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \\
 &= \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \\
 &\leq \int_0^x t^n dt \\
 &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \\
 &= \frac{x^{n+1}}{n+1}
 \end{aligned}$$

より

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

が示される。

(証明終)

(3)

与式を変形すると

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \\
 &= (-1)^n \int_0^x \frac{t^n + t^{n-1} - t^{n-1}}{1+t} dt \\
 &= (-1)^n \int_0^x \left(t^{n-1} - \frac{t^{n-1}}{1+t} \right) dt \\
 &= (-1)^n \int_0^x t^{n-1} dt + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \\
 &= (-1)^n \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x + f_{n-1}(x) \\
 &= \frac{(-1)^n x^n}{n} + f_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

となり, 漸化式が得られる。

(証明終)