

(1)

直線 $y = ax + b$ と放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ が共有点を持たないとき、方程式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 &= ax + b \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(a+2)x + 6 - 2b &= 0\end{aligned}$$

が実数解を持たないから、判別式が 0 より小さい。よって

$$\begin{aligned}(a+2)^2 + (2b-6) &< 0 \\ \Leftrightarrow b &< -\frac{1}{2}a^2 - 2a + 1 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

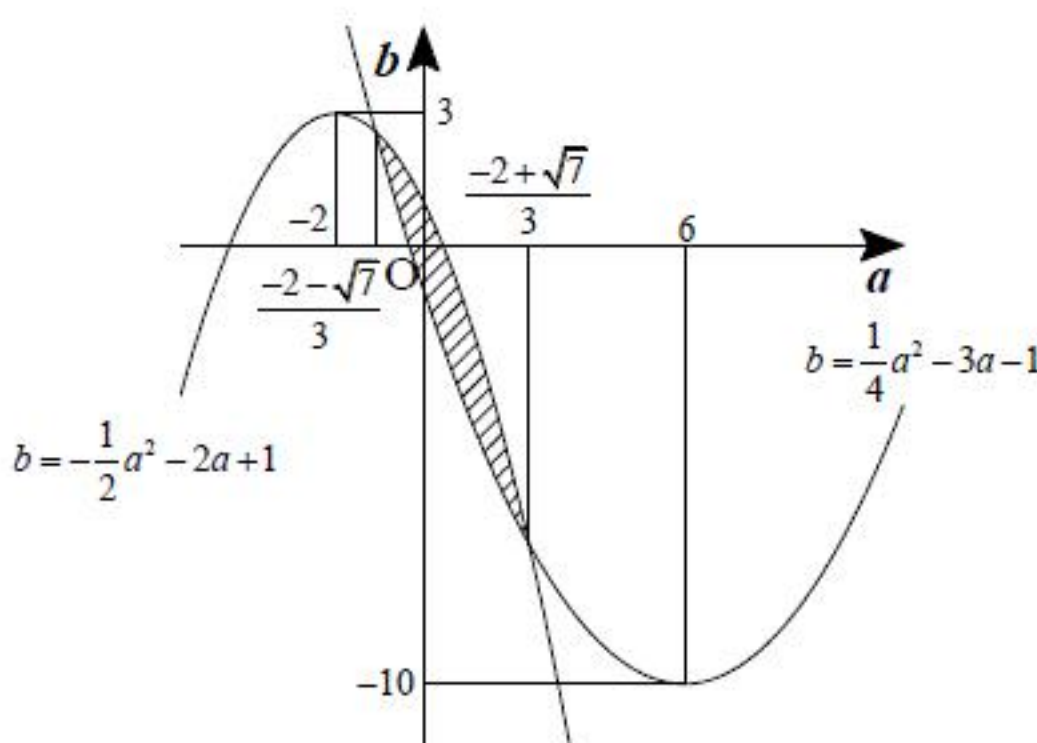
となる。同様にして

$$\begin{aligned}-x^2 + 6x - 10 &= ax + b \\ \Leftrightarrow x^2 + (a-6)x + b + 10 &= 0\end{aligned}$$

が実数解を持たない条件から

$$\begin{aligned}(a-6)^2 - 4(b+10) &< 0 \\ \Leftrightarrow b &> \frac{1}{4}a^2 - 3a - 1 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。よって①、②式から、領域 D を図示すると以下ようになる。ただし、境界はすべて含まない。



(答) 前図、ただし境界はすべて含まない

(2)

(1)より領域 D は

$$\frac{2-2\sqrt{7}}{3} < a < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$$

の範囲にあり、

$$\begin{cases} -2 < \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < -1 \\ 2 < \frac{2+2\sqrt{7}}{3} < 3 \end{cases}$$

となるので、領域 D に属する点のうち a 座標が取りうる整数値は

$$a = -1, 0, 1, 2$$

である。以下それぞれの a の値について場合分けをし、 b の値をもとめていく。

[1] $a = -1$ のとき

①、②式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a^2 - 3a - 1 &< b < -\frac{1}{2}a^2 - 2a + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{4} &< b < \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となるが、これを満たす整数 b は存在しない。

[2] $a = 0$ のとき

①、②式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a^2 - 3a - 1 &< b < -\frac{1}{2}a^2 - 2a + 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< b < 1\end{aligned}$$

から、これを満たす整数 b は 0 のみ。

[3] $a = 1$ のとき

①、②式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a^2 - 3a - 1 &< b < -\frac{1}{2}a^2 - 2a + 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{15}{4} &< b < -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

であるから、これを満たす整数 b は $-3, -2$ となる。

[4] $a = 2$ のとき

①、②式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a^2 - 3a - 1 &< b < -\frac{1}{2}a^2 - 2a + 1 \\ \Leftrightarrow -6 &< b < -5\end{aligned}$$

となり、これを満たす整数 b は存在しない。

以上[1]～[4]より、 $P(a, b)$ が D に属する整数の組は $(a, b) = (0, 0), (1, -2), (1, -3)$ の 3 組。

(答) $(a, b) = (0, 0), (1, -2), (1, -3)$

(1)

$1 \leq d \leq 99$ なる整数 d について考える(これに属さない数 d について、題意を満たす確率は 0 である)。引いた二枚のカードに書かれた数を $x, y (x < y)$ とする。ある d について、

$$1 \leq x \leq 100 - d$$

を満たす x に対して差が d となる y は一つだけ存在するので、差が d となる x, y のペアは $100 - d$ 通り存在する。二枚のカードの引き方は

$$\begin{aligned} {}_{100}C_2 &= \frac{100 \cdot 99}{2} \\ &= 4950 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{100 - d}{4950}$$

である。

(答) $1 \leq d \leq 99$ のとき: $\frac{100 - d}{4950}$, それ以外のとき: 0

(2)

求める期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{99} d \cdot \frac{100 - d}{4950} &= \frac{1}{4950} \sum_{d=1}^{99} (100d - d^2) \\ &= \frac{1}{4950} \left\{ 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 100 - \frac{1}{6} \cdot 99 \cdot 100 \cdot 199 \right\} \\ &= \frac{166650}{4950} \\ &= \frac{101}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{101}{3}$

(1)

 C について

$$y' = -2x + 2\sin a$$

であるから、求める接線の方程式は

$$y = (-2t + 2\sin a)(x - t) - t^2 + 2(\sin a)t + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -2(t - \sin a)x + t^2 + 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -2(t - \sin a)x + t^2 + 2$$

(2)

(1)で求めた接線が点(1, 2)を通るとき、方程式

$$2 = -2(t - \sin a) + t^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 2\sin a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立ち、実数解の個数だけ接線が存在する。判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = 1 - 2\sin a$$

となり、 a の範囲に注意して $D=0$ を解くと

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin a = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

となる。よって

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < a < 2\pi \text{ のとき, } D > 0 \text{ つまり } \textcircled{1} \text{ は異なる二つの実数解をもつ} \\ a = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ は実数解を一つ持つ} \\ \frac{\pi}{6} < a < \frac{5}{6}\pi \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ は実数解を持たない} \end{array} \right.$$

となるので、

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < a < 2\pi \text{ のとき接線は二本引ける} \\ a = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \text{ のとき接線は一本引ける} \\ \frac{\pi}{6} < a < \frac{5}{6}\pi \text{ のとき接線は引けない。} \end{array} \right.$$

となる。

$$(\text{答}) \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < a < 2\pi \text{ のとき接線は二本引ける} \\ a = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \text{ のとき接線は一本引ける} \\ \frac{\pi}{6} < a < \frac{5}{6}\pi \text{ のとき接線は引けない。} \end{array} \right.$$

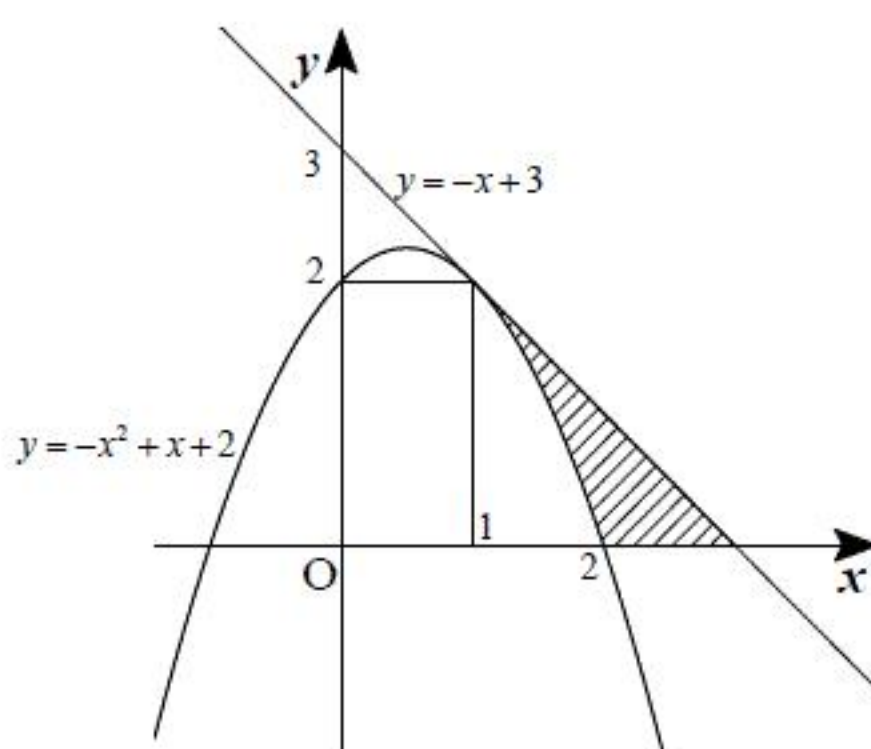
(3)

接線が一本しか引けないとき、(2)より $a = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ であるから

$$C: y = -x^2 + x + 2$$

$$\text{接線: } y = -x + 3$$

となる。これらを図示すると下の通り。



求める面積は、上図斜線部の面積であるから

$$\int_1^2 \{-x + 3 - (-x^2 + x + 2)\} dx + \int_2^3 (-x + 3) dx = \int_1^2 (x-1)^2 dx + \frac{1}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{6}$$