

(1)

題意は

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & b \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} c^k \\ 0 & c^n \end{pmatrix} (n \geq 2), \quad A = \begin{pmatrix} a & b d_0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を示すことである。 $d_0 = 1$ より $A = \begin{pmatrix} a & b d_0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ は成り立たつ。また,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より, $n=2$ のときも①は成り立たつ。ここで $n=i (i>1)$ の時①が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} A^{i+1} &= A^i A \\ &= \begin{pmatrix} a^i & b \sum_{k=0}^{i-1} a^{i-k-1} c^k \\ 0 & c^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{i+1} & a^i b + b \sum_{k=0}^{i-1} a^{i-k-1} c^{k+1} \\ 0 & c^{i+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{i+1} & b \sum_{k=0}^{(i+1)-1} a^{(i+1)-k-1} c^k \\ 0 & c^{i+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より, $n=i+1$ のときも①は成り立つ。以上のことから, 数学的帰納法より任意の自然数 n について①はなりたつ。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

3以上の奇数 n について考えるから, 自然数 i を用いて $n=2i+1$ と表すことができる。

[1] $b=0$ のとき

(1)より, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned} A^n &= A \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2i+1} = a \\ c^{2i+1} = c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^{2i} - 1) = 0 \\ c(c^{2i} - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 i は任意の自然数であるから, $(a, c) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)を得る。

[2] $b \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} A^n &= A \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{2i+1} & b \sum_{k=0}^{2i} a^{2i-k} c^k \\ 0 & c^{2i+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2i+1} = a \\ c^{2i+1} = c \\ \sum_{k=0}^{2i} a^{2i-k} c^k = 1 (\because b \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで第一式と第二式から, [1]より

$(a, c) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)

となる。 $(a, c) = (\pm 1, 0)$ のとき, 第三式について

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2i} (\pm 1)^{2i-k} (0)^k &= (\pm 1)^{2i} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よりなりたつ。同様にして $(a, c) = (0, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2i} (0)^{2i-k} (\pm 1)^k &= (\pm 1)^{2i} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2i} (\pm 1)^{2i-k} (\mp 1)^k &= 1 + (\pm 1)^{2i-1} (\mp 1) + \cdots + 1 \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので, これらは解である。しかし $(a, c) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1)$ のとき

$$\sum_{k=0}^{2i} (0)^{2i-k} (0)^k = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2i} (\pm 1)^{2i-k} (\pm 1)^k &= \sum_{k=0}^{2i} (\pm 1)^{2i} \\ &= 2i+1 > 1 \end{aligned}$$

となるので, 解ではない。以上より, $b \neq 0$ のとき $A^n = A$ の解は

$(a, c) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)である。

(答) $b=0$ のとき $(a, c) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)

$b \neq 0$ のとき $(a, c) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)

(1)

$$f(x) = \frac{2^x}{x^2} \quad (0 < x < \infty)$$

とおくと

$$f'(x) = \frac{2^x(x \log 2 - 2)}{x^3}$$

となる。よって、この関数の増減表は

x	0	...	$\frac{2}{\log 2}$	...
$f'(x)$	$\times$	-	0	+
$f(x)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

となるので、 $f(x)$ は $x = \frac{2}{\log 2}$ で最小値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\log 2}\right) &= \frac{2^{\frac{2}{\log 2}}}{\left(\frac{2}{\log 2}\right)^2} \\ &= \frac{(\log 2)^2}{4} \cdot 2^{\log_2 e^2} \\ &= \frac{e^2 (\log 2)^2}{4} \end{aligned}$$

を取る。よって $\frac{e^2 (\log 2)^2}{4} \leq \frac{2^x}{x^2}$ が言えるから

$$\frac{2^x}{x} \geq \frac{e^2 (\log 2)^2}{4} x$$

となる。 $x \rightarrow \infty$ のとき右辺は無限大に発散するから、左辺も無限大になる。よって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x} = \infty$$

が示された。

$$(\text{答}) \text{ 最小値: } x = \frac{2}{\log 2} \text{ のとき } \frac{e^2 (\log 2)^2}{4}$$

(2)

$y = 2^x$ について、 $y' = 2^x \log 2$ であるから、 $(t, 2^t)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2^t \log 2 (x - t) + 2^t \\ &= 2^t x \log 2 - 2^t (t \log 2 - 1) \end{aligned}$$

となる。これが原点を通るとき $(x, y) = (0, 0)$ を代入して

$$\begin{aligned} 2^t (t \log 2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{\log 2} \quad (\because 2^t > 0) \end{aligned}$$

となる。よって $y = ax$ が曲線 $y = 2^x$ の接線である時、

$$\begin{aligned} a &= 2^{\frac{1}{\log 2}} \log 2 \\ &= 2^{\log_2 e} \log 2 \\ &= e \log 2 \end{aligned}$$

であり、接点の座標は

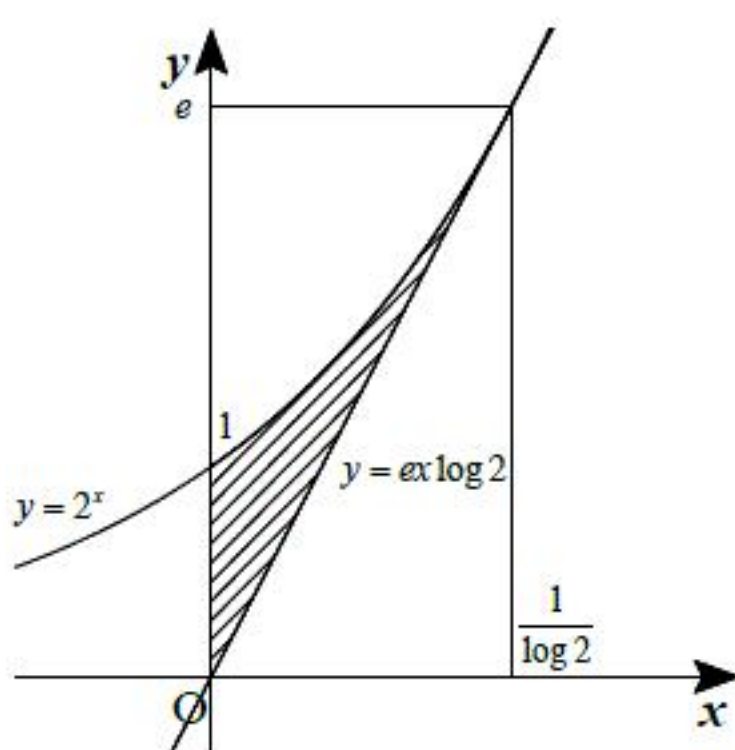
$$\left(\frac{1}{\log 2}, 2^{\frac{1}{\log 2}} \right) = \left(\frac{1}{\log 2}, e \right)$$

となる。

$$(\text{答}) a = e \log 2, \text{ 接点: } \left(\frac{1}{\log 2}, e \right)$$

(3)

$y = 2^x$ と $y = ax$ を図示すると下のようになる。



求める体積は、上図斜線部の領域を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積である。ここで

$$\begin{cases} y = 2^x \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log 2} \\ y = ex \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{y}{e \log 2} \end{cases}$$

となるから、求める体積は

$$\begin{aligned} &\pi \int_0^e \left(\frac{y}{e \log 2} \right)^2 dy - \pi \int_1^e \left(\frac{\log y}{\log 2} \right)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{(e \log 2)^2} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^e - \frac{\pi}{(\log 2)^2} \left[y (\log y)^2 \right]_1^e + \frac{\pi}{(\log 2)^2} \int_1^e 2 \log y dy \\ &= \frac{\pi e}{3 (\log 2)^2} - \frac{\pi e}{(\log 2)^2} + \frac{2\pi}{(\log 2)^2} [y \log y - y]_1^e \\ &= -\frac{2\pi e}{3 (\log 2)^2} + \frac{2\pi}{(\log 2)^2} \\ &= \frac{2\pi}{3 (\log 2)^2} (3 - e) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{2\pi}{3 (\log 2)^2} (3 - e)$$

(1)

$$a_1 = b + cr = -1$$

$$\Leftrightarrow b = -cr - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

より

$$a_2 = 4b + cr^2 = -16$$

$$\Leftrightarrow 4(-cr - 1) + cr^2 = -16$$

$$\Leftrightarrow cr(r - 4) = -12$$

$$\Leftrightarrow cr = -\frac{12}{r-4} (\because r-4 \neq 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①, ②式より

$$a_3 = 9b + cr^3 = -39$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\frac{12}{r-4} - 1\right) - \frac{12}{r-4}r^2 = -39$$

$$\Leftrightarrow 108 - 12r^2 = -30(r - 4)$$

$$\Leftrightarrow 12r^2 - 30r + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2r - 1)(r - 2) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}, 2$$

となり, 再び①, ②式から

$$(r, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{31}{7}, \frac{48}{7}\right), (2, -7, 3)$$

を得る。また,

$$a_4 = 16b + cr^4 = -64 \quad \dots \textcircled{3}$$

であるが, $(r, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{31}{7}, \frac{48}{7}\right)$ のとき

$$16b + cr^4 = -\frac{495}{7}$$

となるから③を満たさないが, $(r, b, c) = (2, -7, 3)$ のときは③式を満たす。よって

$$(r, b, c) = (2, -7, 3)$$

となる。

(答) $(r, b, c) = (2, -7, 3)$

(2)

 $b = -5, c = 2, r = 3$ のとき $a_n = -5n^2 + 2 \cdot 3^n$ である。ここで数列 $d_n = a_{n+1} - a_n$ について考える。

$$\begin{aligned} d_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= -5(n+1)^2 + 2 \cdot 3^{n+1} - \{-5n^2 + 2 \cdot 3^n\} \\ &= -10n - 5 + 4 \cdot 3^n \end{aligned}$$

となる。さらに $e_n = d_{n+1} - d_n$ について考える。

$$\begin{aligned} e_n &= -10(n+1) - 5 + 4 \cdot 3^{n+1} - (-10n - 5 + 4 \cdot 3^n) \\ &= -10 + 8 \cdot 3^n > 0 \end{aligned}$$

となるから, 数列 d_n は単調増加する。ここで

$$\begin{cases} d_1 = a_2 - a_1 = -3 \\ d_2 = a_3 - a_2 = 11 \end{cases}$$

となるから, $a_1 > a_2 < a_3 < a_4 \dots$ となるので, a_n は $n = 2$ のとき最小値

$$\begin{aligned} a_2 &= -5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

を取る。

(答) a_n は $n = 2$ のとき最小値 -2 をとる

(1)

$0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ のとき, $\sin x > 0, \sin y > 0, \sin \frac{x+y}{2} > 0$ であるので

$$\begin{aligned}
 & \left(2 \sin \frac{x+y}{2} \right)^2 - (\sin x + \sin y)^2 \\
 &= 4 \sin^2 \frac{x+y}{2} - (\sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y) \\
 &= 2 - 2 \cos(x+y) - (2 - \cos^2 x - \cos^2 y + 2 \sin x \sin y) \\
 &= 2 - 2 \cos x \cos y + 2 \sin x \sin y - 2 + \cos^2 x + \cos^2 y - 2 \sin x \sin y \\
 &= (\cos x - \cos y)^2 \geq 0 \\
 \\
 & \Leftrightarrow \sin x + \sin y \leq 2 \sin \frac{x+y}{2}
 \end{aligned}$$

となる。等号成立は $\cos x = \cos y$ のときであるが, $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ のとき $\cos x, \cos y$ は単調減少関数であるから $x = y$ のときである。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

$A_9 = A_1$ として, $\triangle A_i O A_{i+1} (i=1, 2, \dots, 8)$ について考える。 $\angle A_i O A_{i+1} = \alpha_i$ であり, $O A_i = 1$ であるから, 求める面積は

$$\sum_{i=1}^8 \frac{1}{2} \cdot O A_i \cdot O A_{i+1} \cdot \sin \angle A_i O A_{i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \sin \alpha_i$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \sin \alpha_i$$

(3)

(1)の不等式を利用すると

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \sin \alpha_i \\
 &= \frac{1}{2} \{ (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) + (\sin \alpha_3 + \sin \alpha_4) + (\sin \alpha_5 + \sin \alpha_6) + (\sin \alpha_7 + \sin \alpha_8) \} \\
 &\leq \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \sin \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} + \sin \frac{\alpha_5 + \alpha_6}{2} + \sin \frac{\alpha_7 + \alpha_8}{2} \\
 &\leq 2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4} + 2 \sin \frac{\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8}{4} \\
 &\leq 4 \sin \frac{\sum_{i=1}^8 \alpha_i}{8}
 \end{aligned}$$

となる。ここで $\sum_{i=1}^8 \alpha_i = 360^\circ$ であるから,

$$\begin{aligned}
 4 \sin \frac{\sum_{i=1}^8 \alpha_i}{8} &= 4 \sin 45^\circ \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

となり,

$$S \leq 2\sqrt{2}$$

が示された。また, 等号成立は

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_8$$

であるから, 正八角形るときである。よって題意は示された。

(証明終)