

(1)

方程式

$$\begin{aligned}
 x^2 + a - 2 &= ax \\
 \Leftrightarrow x^2 - ax + a - 2 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

の判別式について

$$\begin{aligned}
 a^2 - 4(a - 2) &= a^2 - 4a + 8 \\
 &= (a - 2)^2 + 4 \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

となるので、方程式①は異なる二つの実数解を持つから、放物線 $y = x^2 + a - 2$ と直線 $y = ax$ は異なる二点で交わることが示された。

(証明終)

(2)

$A(0, a - 2)$ であり、 $P(\alpha, a\alpha)$, $Q(\beta, a\beta)$ ($\alpha < \beta$) とおくと、 α, β は①式の二解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = a - 2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。また、

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (\alpha, a\alpha - a + 2) \\ \overrightarrow{AQ} = (\beta, a\beta - a + 2) \end{cases}$$

となる。 AP, AQ が直交するとき、これら二つのベクトルの内積が 0 に等しいので

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= \alpha\beta + (a\alpha - a + 2)(a\beta - a + 2) \\
 &= a - 2 + a^2\alpha\beta - a(a - 2)(\alpha + \beta) + (a - 2)^2 \\
 &= a - 2 + a^2(a - 2) - a^2(a - 2) + (a - 2)^2 \\
 &= (a - 2)(a - 1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, 2$$

となる。ここで $a = 2$ のとき②より、

$$\begin{aligned}
 \alpha\beta &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha &= 0, \beta = 0
 \end{aligned}$$

となり、 PQ が A と異なる点であるという仮定に反するから $a \neq 2$ である。 $a = 1$ のとき②式より

$$\begin{aligned}
 \alpha\beta &= -1 \\
 \Rightarrow \alpha, \beta &\neq 0
 \end{aligned}$$

となるので、求める値は $a = 1$ である。

(答) $a = 1$

(1)

AIは $\angle A$ の二等分線であるから $\angle IAR = \angle IAQ = 30^\circ$ となる。また、R、Qは内接円と辺の接点であるから $\angle IQA = \angle IRA = 90^\circ$ となる。 $\triangle IAR$ と $\triangle IAQ$ は辺IAを共有するので、二つの三角形は合同である。よって

$$\begin{aligned}\angle RIQ &= 2\angle AIR \\ &= 2(180^\circ - \angle ARI - \angle IAR) \\ &= 2 \cdot 60^\circ \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{IR} &= |\overrightarrow{IQ}| |\overrightarrow{IR}| \cos \angle RIQ \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{IR} = -\frac{1}{2}$$

(2)

$$|\overrightarrow{IP}| = |\overrightarrow{IQ}| = |\overrightarrow{IR}| = 1, \overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{IR} = -\frac{1}{2} \text{ から}$$

$$\begin{aligned}7\overrightarrow{IP} + 5\overrightarrow{IQ} + s\overrightarrow{IR} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (5\overrightarrow{IQ} + s\overrightarrow{IR}) &= -7\overrightarrow{IP} \\ \Rightarrow (5\overrightarrow{IQ} + s\overrightarrow{IR})^2 &= 49|\overrightarrow{IP}|^2 \\ \Leftrightarrow 25|\overrightarrow{IQ}|^2 + 10s\overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{IR} + s^2|\overrightarrow{IR}|^2 &= 49 \\ \Leftrightarrow s^2 - 5s - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s-8)(s+3) &= 0 \\ \therefore s &= 8 \quad (\because s > 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = 8$$

(3)

(1)と同様に考えて、 $\triangle IRB$ と $\triangle IPB$ は合同であるから、 $\angle RIP = 2\alpha$ となる。ここで(2)の式より

$$\begin{aligned}7\overrightarrow{IP} + 8\overrightarrow{IR} &= -5\overrightarrow{IQ} \\ \Rightarrow (7\overrightarrow{IP} + 8\overrightarrow{IR})^2 &= 25|\overrightarrow{IQ}|^2 \\ \Leftrightarrow 49|\overrightarrow{IP}|^2 + 112\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IR} + 64|\overrightarrow{IR}|^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IR} &= -\frac{88}{112} \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{IP}| |\overrightarrow{IR}| \cos 2\alpha &= -\frac{11}{14} \\ \Leftrightarrow \cos 2\alpha &= -\frac{11}{14} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで $\angle IRB = 90^\circ$ であるから、 $\alpha < 90^\circ$ なので $\tan \alpha > 0$ である。よって①式より

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{11}{14}} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{25}{3}} \\ &= \frac{5}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \cos 2\alpha = -\frac{11}{14}, \tan \alpha = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

(4)

$$\begin{aligned}AR + RB &= IR \tan 60^\circ + IR \tan \alpha \\ &= IR \left(\sqrt{3} + \frac{5}{3}\sqrt{3} \right) \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。よって求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot IR &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{3} \cdot 1 \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

(1)

$$\begin{aligned}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)' &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_2^3 \sqrt{x^2-4} dx &= \left[x\sqrt{x^2-4} \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}} \\ &= 3\sqrt{5} - \int_2^3 \left(\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{4}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx \\ &= 3\sqrt{5} - \int_2^3 \sqrt{x^2-4} dx - 4 \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 \sqrt{x^2-4} dx = \frac{3}{2}\sqrt{5} - 2 \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

となる。ここで(1)より

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} &= \left[\log\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| \right]_2^3 \\ &= \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\end{aligned}$$

となるから

$$\int_2^3 \sqrt{x^2-4} dx = \frac{3}{2}\sqrt{5} - 2 \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_2^3 \sqrt{x^2-4} dx = \frac{3}{2}\sqrt{5} - 2 \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+4kn+2n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 4\frac{k}{n} + 2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-2}}\end{aligned}$$

となるが、(1)より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+4kn+2n^2}} &= \left[\log\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-2}\right| \right]_0^1 \\ &= \log\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2+\sqrt{2}}\right) \\ &= \log\frac{(3+\sqrt{7})(2-\sqrt{2})}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \log\frac{(3+\sqrt{7})(2-\sqrt{2})}{2}$$