

(1)

題意は

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & b \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} c^k \\ 0 & c^n \end{pmatrix} (n \geq 2), \quad A = \begin{pmatrix} a & bd_0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を示すことである。 $d_0=1$ より $A = \begin{pmatrix} a & bd_0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ は成り立たつ。また、

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $n=2$ のときも①は成り立たつ。ここで $n=i(i>1)$ の時①が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} A^{i+1} &= A^i A \\ &= \begin{pmatrix} a^i & b \sum_{k=0}^{i-1} a^{i-k-1} c^k \\ 0 & c^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{i+1} & a^i b + b \sum_{k=0}^{i-1} a^{i-k-1} c^{k+1} \\ 0 & c^{i+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{i+1} & b \sum_{k=0}^{(i+1)-1} a^{(i+1)-k-1} c^k \\ 0 & c^{i+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $n=i+1$ のときも①は成り立つ。以上のことから、数学的帰納法より任意の自然数 n について①はなりたつ。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

3以上の奇数 n について考えるから、自然数 i を用いて $n=2i+1$ と表すことができる。

[1] $b=0$ のとき

$$(1) \text{より, } A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} A^n &= A \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2i+1} = a \\ c^{2i+1} = c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^{2i}-1) = 0 \\ c(c^{2i}-1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 i は任意の自然数であるから、 $(a, c) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)を得る。

[2] $b \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} A^n &= A \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{2i+1} & b \sum_{k=0}^{2i} a^{2i-k} c^k \\ 0 & c^{2i+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2i+1} = a \\ c^{2i+1} = c \\ \sum_{k=0}^{2i} a^{2i-k} c^k = 1 (\because b \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで第一式と第二式から、[1]より

$(a, c) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)

となる。 $(a, c) = (\pm 1, 0)$ のとき、第三式について

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2i} (\pm 1)^{2i-k} (0)^k &= (\pm 1)^{2i} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よりなりたつ。同様にして $(a, c) = (0, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2i} (0)^{2i-k} (\pm 1)^k &= (\pm 1)^{2i} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2i} (\pm 1)^{2i-k} (\mp 1)^k &= 1 + (\pm 1)^{2i-1} (\mp 1) + \cdots + 1 \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので、これらは解である。しかし $(a, c) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1)$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2i} (0)^{2i-k} (0)^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{2i} (\pm 1)^{2i-k} (\pm 1)^k &= \sum_{k=0}^{2i} (\pm 1)^{2i} \\ &= 2i+1 > 1 \end{aligned}$$

となるので、解ではない。以上より、 $b \neq 0$ のとき $A^n = A$ の解は

$(a, c) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)である。

(答) $b=0$ のとき $(a, c) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)

$b \neq 0$ のとき $(a, c) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ (複合同順)

(1)

AIは $\angle A$ の二等分線であるから $\angle IAR = \angle IAQ = 30^\circ$ となる。また、R、Qは内接円と辺の接点であるから $\angle IQA = \angle IRA = 90^\circ$ となる。 $\triangle IAR$ と $\triangle IAQ$ は辺IAを共有するので、二つの三角形は合同である。よって

$$\begin{aligned}\angle RIQ &= 2\angle AIR \\ &= 2(180^\circ - \angle ARI - \angle IAR) \\ &= 2 \cdot 60^\circ \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{IR} &= |\overrightarrow{IQ}| |\overrightarrow{IR}| \cos \angle RIQ \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{IR} = -\frac{1}{2}$$

(2)

$$|\overrightarrow{IP}| = |\overrightarrow{IQ}| = |\overrightarrow{IR}| = 1, \quad \overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{IR} = -\frac{1}{2} \text{ から}$$

$$\begin{aligned}7\overrightarrow{IP} + 5\overrightarrow{IQ} + s\overrightarrow{IR} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (5\overrightarrow{IQ} + s\overrightarrow{IR}) &= -7\overrightarrow{IP} \\ \Rightarrow (5\overrightarrow{IQ} + s\overrightarrow{IR})^2 &= 49|\overrightarrow{IP}|^2 \\ \Leftrightarrow 25|\overrightarrow{IQ}|^2 + 10s\overrightarrow{IQ} \cdot \overrightarrow{IR} + s^2|\overrightarrow{IR}|^2 &= 49 \\ \Leftrightarrow s^2 - 5s - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s-8)(s+3) &= 0 \\ \therefore s &= 8 (\because s > 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = 8$$

(3)

(1)と同様に考えて、 $\triangle IRB$ と $\triangle IPB$ は合同であるから、 $\angle RIP = 2\alpha$ となる。ここで(2)の式より

$$\begin{aligned}7\overrightarrow{IP} + 8\overrightarrow{IR} &= -5\overrightarrow{IQ} \\ \Rightarrow (7\overrightarrow{IP} + 8\overrightarrow{IR})^2 &= 25|\overrightarrow{IQ}|^2 \\ \Leftrightarrow 49|\overrightarrow{IP}|^2 + 112\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IR} + 64|\overrightarrow{IR}|^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IR} &= -\frac{88}{112} \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{IP}| |\overrightarrow{IR}| \cos 2\alpha &= -\frac{11}{14} \\ \Leftrightarrow \cos 2\alpha &= -\frac{11}{14} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで $\angle IRB = 90^\circ$ であるから、 $\alpha < 90^\circ$ なので $\tan \alpha > 0$ である。よって①式より

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{11}{14}} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{25}{3}} \\ &= \frac{5}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \cos 2\alpha = -\frac{11}{14}, \quad \tan \alpha = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

(4)

$$\begin{aligned}AR + RB &= IR \tan 60^\circ + IR \tan \alpha \\ &= IR \left(\sqrt{3} + \frac{5}{3}\sqrt{3} \right) \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。よって求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot IR &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{3} \cdot 1 \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

(1)

 $a=k(0 \leq k \leq n)$ となる確率は

$${}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

であり、 $b=k$ となる確率は

$$\frac{1}{n+1}$$

であるから、 $a=b$ となる確率は

$$\sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n {}_nC_k$$

となるが、二項定理より

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k$$

であるから、 $x=1$ とすれば

$$2^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k$$

を得る。よって求める確率は

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n {}_nC_k &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot 2^n \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{n+1}$$

(2)

 a と b が1だけ違う場合の確率を求める。 $a=k(0 \leq k \leq n)$ となる確率は

$${}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。 $k \neq 0, n$ のとき、 $b=k \pm 1$ となる確率は

$$\frac{2}{n+1}$$

であり、 $k=0, n$ のとき、 a と b の差が1となる確率は

$$\frac{1}{n+1}$$

であるので、 a と b が1だけ違う場合の確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{2}{n+1} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。よって求める期待値は

$$\begin{aligned} E_n &= 1000n \cdot \frac{1}{n+1} + 500n \cdot \frac{2}{n+1} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1000n}{n+1} \left\{ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad E_n = \frac{1000n}{n+1} \left\{ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1000n}{n+1} \left\{ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} &= \frac{2000(n+1) - 2000}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2000 - \frac{2000}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 2000$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 2000$$

(1)

二つの関数 $y = -x + a$, $y = \frac{1}{x}$ は x, y について対称であるから、直線 ℓ と双曲線 C は直線 $y = x$

に関して対称である。よって二点 A, B も直線 $y = x$ に関して対称であり、 $A\left(t, \frac{1}{t}\right)$ とすれば、

$B\left(\frac{1}{t}, t\right)$ となる。ここで $y = -x + a$ から $x + y = a > 0$ であり、 $y = \frac{1}{x}$ から $xy = 1 > 0$ であるので A

は第一象限に存在する。よって $t > 0$ 。二点 A, B について

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \left(t, \frac{1}{t}\right) \\ \overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{t}, t\right) \end{cases}$$

となり、二つのベクトルのなす角が 60° に等しいので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= t \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \cdot t \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos 60^\circ &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{t^2} + t^2} &= 4 \\ \Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} &= 4 \quad \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \therefore t &= \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2} (\because t > 0) \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となるから、 A, B の座標は $\left(\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{2}\right)$ (複合同順) である。よって

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。ここから、 $\triangle AOB$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。途中①式を用いた。

(答) $a_0 = \sqrt{6}$, $\triangle AOB$ の面積: $\sqrt{3}$

(2)

方程式

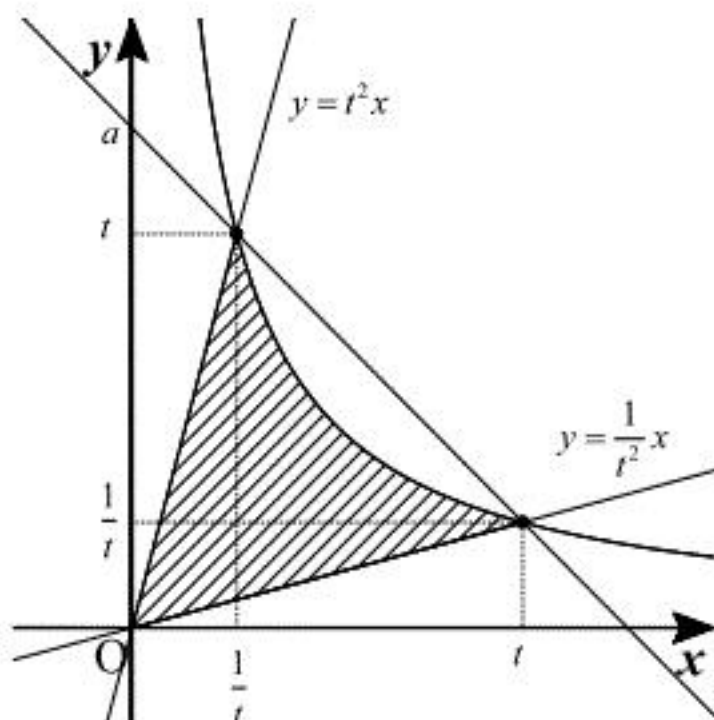
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= -x + a \\ \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 &= 0 \end{aligned}$$

が異なる二つの実数解を持つ条件は、判別式を考えると

$$\begin{aligned} a^2 - 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)(a-2) &> 0 \\ \therefore a &> 2 (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。よって $0 < a \leq 2$ において $S(a) = 0$ である。 $a > 2$ のとき、求める面積は下図の斜線部

の面積である。ここで $t > \frac{1}{t} > 0$, つまり $t > 1$ とした。



よって $a > 2$ において

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^t \left\{ t^2 x - \frac{1}{t^2} x \right\} dx + \int_{\frac{1}{t}}^t \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{t^2} x \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) x^2 \right]_0^t + \left[\log x - \frac{1}{2t^2} x^2 \right]_{\frac{1}{t}}^t \\ &= \frac{1}{2t^2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + \log t - \frac{1}{2} - \log \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^4} \\ &= 2 \log t \end{aligned}$$

となる。ここで $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ は直線 ℓ を通るから

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= -t + a \\ \Leftrightarrow t^2 - at + 1 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} (\because t > 1, a > 2) \end{aligned}$$

となるので

$$S(a) = 2 \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)$$

となる。

(答) $S(a) = 2 \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right) (a > 2), 0 (0 < a \leq 2)$

(3)

(1)より $a_0 = \sqrt{6}$ であるから

$$\begin{aligned} S(a) &= 2S(a_0) \\ \Leftrightarrow 2 \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right) &= 4 \log \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right) &= \log \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right) &= \log (2 + \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow a + \sqrt{a^2 - 4} &= 4 + 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \left\{ a - (4 + 2\sqrt{3}) \right\}^2 &= a^2 - 4 \\ \Leftrightarrow -2a(4 + 2\sqrt{3}) + 28 + 16\sqrt{3} &= -4 \\ \therefore a &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 4$