

平成20年度入学者選抜試験
個別学力試験問題(前期日程)

数 学
(医 学 部 医 学 科)

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
2. 問題紙は2ページ、解答用紙は4枚である。指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
4. 解答用紙の裏面は使わないこと。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときは、小問の結論を明示すること。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後、問題紙は持ち帰ること。

1 a, b, c を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $d_0 = 1$ とし, 自然数 n に対して

$$d_n = a^n + a^{n-1}c + \cdots + a^{n-k}c^k + \cdots + ac^{n-1} + c^n$$

とする。このとき,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & bd_{n-1} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) n を 3 以上の奇数とする。このとき, $b = 0$ と $b \neq 0$ のそれぞれの場合について, $A^n = A$ をみたすような組 (a, c) をすべて求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) 関数

$$\frac{2^x}{x^2} \quad (0 < x < \infty)$$

の最小値を求めて

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x} = \infty$$

を示せ。

(2) 直線 $y = ax$ が曲線 $y = 2^x$ の接線であるとき, a の値と, 接点の座標を求めよ。

(3) (2) のとき, 曲線 $y = 2^x$ と接線 $y = ax$ および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

- 3 一般項が $a_n = bn^2 + cr^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。ただし b, c, r は実数とする。

- (1) $\{a_n\}$ が $a_1 = -1, a_2 = -16, a_3 = -39, a_4 = -64$ をみたしているとき、 b, c, r の値を求めよ。
- (2) $b = -5, c = 2, r = 3$ のとき、 a_n の値が最小となる自然数 n の値と、そのときの a_n の値を求めよ。

- 4 次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ のとき、不等式

$$\sin x + \sin y \leq 2 \sin \frac{x+y}{2}$$

を証明せよ。また、等号が成り立つのは $x = y$ のときだけであることを示せ。

- (2) 八角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ は原点 O を中心とする半径 1 の円に内接していて、円の中心 O はこの八角形の内部にあるとする。弧 A_iA_{i+1} の長さを α_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) とし、弧 A_8A_1 の長さを α_8 とするとき、この八角形の面積 S を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ を用いて表せ。
- (3) (2) の八角形の面積 S について、不等式

$$S \leq 2\sqrt{2}$$

を証明せよ。また、等号が成り立つのはこの八角形が正八角形の時だけであることを示せ。