

平成20年度入学者選抜試験
個別学力試験問題(前期日程)

数 学
(数理・情報システム学科)

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
2. 問題紙は2ページ、解答用紙は4枚である。指示があってから確認し、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
4. 解答用紙の裏面は使わないこと。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときは、小問の結論を明示すること。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後、問題紙は持ち帰ること。

1 a, b, c を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $d_0 = 1$ とし, 自然数 n に対して

$$d_n = a^n + a^{n-1}c + \cdots + a^{n-k}c^k + \cdots + ac^{n-1} + c^n$$

とする。このとき,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & bd_{n-1} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) n を 3 以上の奇数とする。このとき, $b = 0$ と $b \neq 0$ のそれぞれの場合について, $A^n = A$ をみたすような組 (a, c) をすべて求めよ。

2 $\angle A = 60^\circ$ である $\triangle ABC$ に内接する半径 1 の円の中心を I とし, 3 辺 BC , CA , AB とこの内接円との接点をそれぞれ P , Q , R とする。ベクトル $\vec{IP}$, $\vec{IQ}$, $\vec{IR}$ は

$$7\vec{IP} + 5\vec{IQ} + s\vec{IR} = \vec{0}$$

をみたすとする。ただし, $s > 0$ である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{IQ} \cdot \vec{IR}$ を求めよ。

(2) s の値を求めよ。

(3) $\vec{IB}$ と $\vec{IR}$ のなす角を α とするとき, $\cos 2\alpha$ および $\tan \alpha$ の値を求めよ。

(4) $\triangle IAB$ の面積を求めよ。

- 3 A と B がペアとなって賞金のもらえるゲームをおこなう。ゲームのルールは次の通りである。

『自然数 n を 1 つ決める。この n に対して、A は公正に作られた 1 枚のコインを n 回投げ、表が出た回数 a を記録する。次に B は 0 から n までの番号が書かれた $(n+1)$ 枚のカードから 1 枚を引き、そのカードに書かれている番号 b を記録する。』

A と B のペアがもらえる賞金は、 a と b が等しければ $1000n$ 円、 a と b が 1 だけ違う場合には $500n$ 円、それ以外の場合は 0 円である。このゲームをおこなって得られる賞金の期待値を E_n とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) a と b が等しい確率を求めよ。
- (2) E_n を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ を求めよ。

- 4 a を正の数とし、直線 $\ell: y = -x + a$ が双曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ と異なる 2 点 A, B で交わるとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\angle AOB = 60^\circ$ であるとき、 a の値 a_0 と、そのときの $\triangle AOB$ の面積を求めよ。
- (2) 2 つの線分 OA と OB 及び曲線 C とで囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) $S(a) = 2S(a_0)$ となる a の値を求めよ。