

(1)

すべての取り出し方は

$$4 \times 4 = 16 \text{ 通り}$$

A が出した数字を a , B が出した数字を b とすると, A が勝つ取り出し方は

$$(a, b) = (4, 3), (4, 2), (3, 2)$$

の 3 通りである。よって求める確率は

$$\frac{3}{16}$$

$$(\text{答}) \frac{3}{16}$$

(2)

B のすべての取り出し方は

$$4! = 24 \text{ 通り}$$

A は 3 または 4 でしか B に勝てない。A が 3, 4 のときの B の番号を c, d とすると,

[i] 2 勝する場合

$$(c, d) = (2, 3)$$

のときのみである。残りの 2 つの玉はどちらが先でも良いことを考慮すると, 求める確率は

$$\frac{1 \times 2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$(\text{答}) \frac{1}{12}$$

[ii] 1 勝するとき

$$(c, d) = (2, 4), (2, 5), (3, 2), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)$$

の 7 通りのときのみである。残りの 2 つの玉はどちらが先でも良いことを考慮すると, 求める確率は

$$\frac{7 \times 2}{24} = \frac{7}{12}$$

$$(\text{答}) \frac{7}{12}$$

(1)

与えられた方程式は虚数解を2つ持つ。よって実数解は1つである。ここで $x=-2$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (-2)^3 + (a+1)(-2)^2 + (2a+b-1)(-2) + 2b+2 \\ &= -8 + 4a + 4 - 4a - 2b + 2 + 2b + 2 \\ &= 0 \\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

よって $x=-2$ はこの方程式の解であり、実数解は $x=-2$ のみである。

(答) $x=-2$

(2)

(1) より、左辺は $x+2$ を因数に持つ。左辺を因数分解すると

$$(x+2)\{x^2+(a-1)x+b+1\}=0$$

よって $x^2+(a-1)x+b+1=0$ は虚数解をもつので

$$\text{判別式: } (a-1)^2 - 4(b+1) < 0$$

$$\therefore b > \frac{1}{4}(a-1)^2 - 1$$

(答) $b > \frac{1}{4}(a-1)^2 - 1$

(3)

$\frac{1}{4}(a-1)^2 - 1$ の最小値は -1 なので、(2) より

$$-1 < b \leq 1$$

よって b は 0 または 1 である。

[i] b が 0 のとき

$$0 > \frac{1}{4}(a-1)^2 - 1$$

$$\therefore -1 < a < 3$$

よって考えられる a, b の組は

$$(a, b) = (0, 0), (1, 0), (2, 0)$$

[ii] b が 1 のとき

$$1 > \frac{1}{4}(a-1)^2 - 1$$

$$\therefore 1 - 2\sqrt{2} < a < 1 + 2\sqrt{2}$$

ここで、

$$1 - 2\sqrt{2} = 1 - 2 \times 1.414... = -1.828...$$

$$1 + 2\sqrt{2} = 1 + 2 \times 1.414... = 3.828...$$

であるので、考えられる a, b の組は

$$(a, b) = (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)$$

以上より (a, b) の組み合わせは

$$(a, b) = (0, 0), (1, 0), (2, 0), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)$$

(答) $(a, b) = (0, 0), (1, 0), (2, 0), (-1, 1),$
 $(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)$

(1)

対称性より四角形 EFGH は正方形である。また
正四角錐 OABCD $\sim$ 正四角錐 OEFGH
となる。この相似比は

$$a:b$$

なので、体積比は

$$a^3:b^3$$

である。O から ABCD におろした垂線の足を
I, EFGH におろした垂線の足を J とおくと、

$$OI:OJ = a:b$$

より

$$OJ = \frac{b}{a}OI \quad \cdots(1)$$

また、

$$OI - OJ = h \quad \cdots(2)$$

が成り立つ。(1), (2) を OI について解くと、

$$OI = \frac{ah}{a-b}$$

以上より

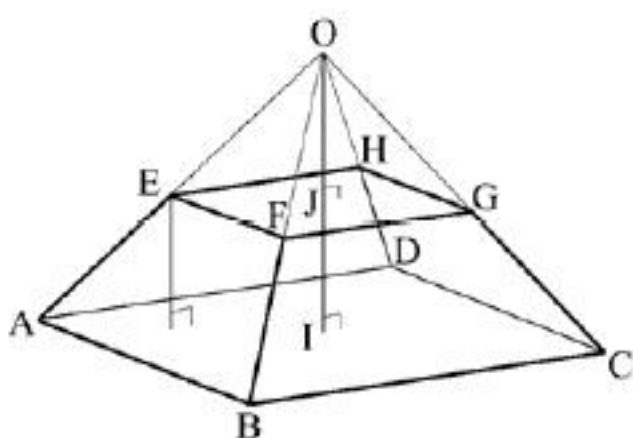
$$(P \text{ の体積}) = (\text{正四角錐 OABCD の体積}) - (\text{正四角錐 OEFGH の体積})$$

$$= \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right) \times (\text{正四角錐 OABCD の体積})$$

$$= \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right) \times \frac{1}{3}a^2 \frac{ah}{a-b}$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$



(2)

$\triangle OAI$ で三平方の定理を用いて、

$$OA^2 = OI^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore OA = a\sqrt{\frac{h^2}{(a-b)^2} + \frac{1}{2}}$$

ここで、 $OA:OE = a:b$ なので、

$$AE = OA - OE$$

$$= \left(1 - \frac{b}{a}\right)OA$$

$$= \frac{a-b}{a} \times a\sqrt{\frac{h^2}{(a-b)^2} + \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{2}}$$

$$(\text{答}) \quad \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{2}}$$

(3)

側面の台形部分について考える。高さを x とおくと、
図の斜線部の直角三角形で三平方の定理を用いて、

$$x^2 = AE^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\therefore x = \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{4}}$$

したがって、

$$(P \text{ の表面積}) = (\text{正方形 ABCD の面積}) + (\text{正方形 EFGH の面積}) + 4 \times (\text{台形の面積})$$

$$= a^2 + b^2 + 4 \times \frac{1}{2} \times (a+b) \times \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{4}}$$

$$= 100 + 64 + 4 \times \frac{1}{2} \times 18 \times \sqrt{15 + \frac{2^2}{4}}$$

$$= 308$$

