

(1)

連立不等式に  $y = x^2 + ax + \frac{b}{4}$  を代入すると、

$$y \geq x \Leftrightarrow x^2 + ax + \frac{b}{4} \geq x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (a-1)x + \frac{b}{4} \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y \geq -2x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 + ax + \frac{b}{4} \geq -2x - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (a+2)x + \frac{b+3}{4} \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

これらの式が任意の  $x$  で成立するので、 $(\textcircled{1} \text{の左辺})=0$  の判別式を  $D_1$ 、 $(\textcircled{2} \text{の左辺})=0$  の判別式を  $D_2$  とおくと

$$D_1 = (a-1)^2 - b \leq 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$D_2 = (a+2)^2 - (b+3) \leq 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 1 \leq b \\ a^2 + 4a + 1 \leq b \end{cases}$$

これが求める条件となる。

(答)  $a^2 - 2a + 1 \leq b$  かつ  $a^2 + 4a + 1 \leq b$ 

(2)

直線  $l, m$  がともに曲線  $C$  と接するときは、 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$  式について等号が成立する時である。よって、

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 = b \\ a^2 + 4a + 1 = b \end{cases}$$

これを解いて、

$$a=0, b=1$$

である。

このとき、曲線  $C$  と 2 直線の位置関係は下図のようになる。直線  $l, m$  の交点の座標は

$$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

であり、曲線と直線  $l, m$  との接点はそれぞれ

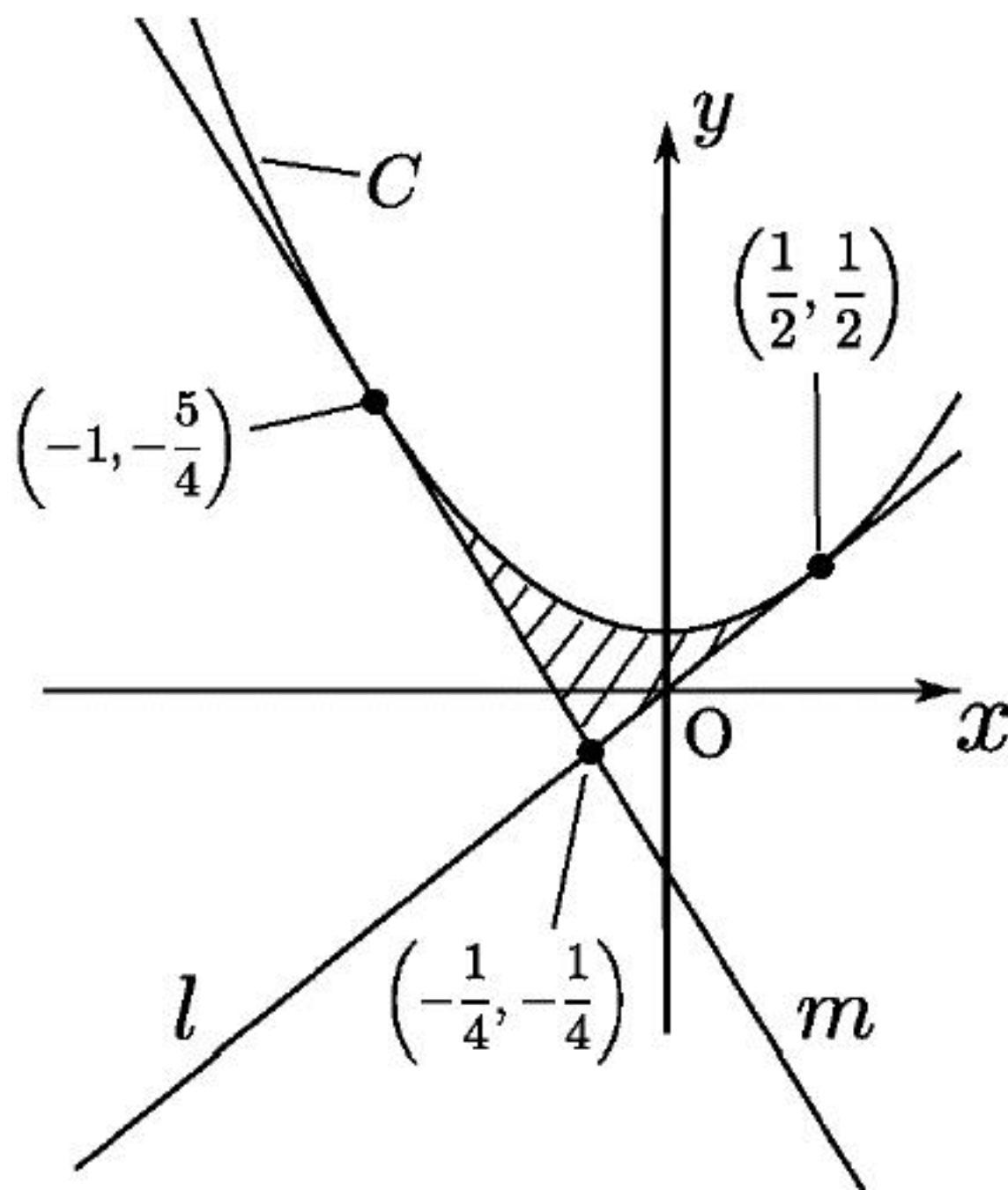
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{5}{4}\right)$$

なので、求める面積（下図斜線部）は、

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} \left(x^2 + \frac{1}{4} + 2x + \frac{3}{4}\right) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{4} - x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{9}{32}$$

(答)  $a=0, b=1, S=\frac{9}{32}$ 

(1)

$$a_{n+1}\sqrt{a_n}=8$$

の両辺について、底を2とする対数をとると、

$$\log_2 a_{n+1} + \frac{1}{2} \log_2 a_n = 3$$

よって

$$b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n = 3 \quad (n \geq 1)$$

(2)

①式を変形すると、

$$b_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}(b_n - 2)$$

よって、 $b_n - 2$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるので、

$$b_n - 2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 - 2)$$

以上から、

$$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (\log_2 a_1 - 2) + 2 = 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

$$(\text{答}) \quad 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2 \quad (n \geq 1)$$

(3)

$$2^{b_n} = a_n$$

より、(2)の結果とあわせて、

$$a_n = 2^{4 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^{4 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2} \quad (n \geq 1)$$

(1)

$$\overrightarrow{OA} = (2, 2, 1), \quad \overrightarrow{OB} = (t, 1, 1+t)$$

なので

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2t + 2 + (1+t) = 3t + 3$$

また,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB$$

であり,

$$|\overrightarrow{OA}| = 3, \quad |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2t^2 + 2t + 2}$$

であるから

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{t+1}{\sqrt{2t^2 + 2t + 2}}$$

よって,

$$\sin \angle AOB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} = \sqrt{\frac{t^2 + 1}{2t^2 + 2t + 2}}$$

以上から面積は、面積の公式を用いて

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{2t^2 + 2t + 2} \times \sqrt{\frac{t^2 + 1}{2t^2 + 2t + 2}} = \frac{3}{2} \sqrt{t^2 + 1}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{2} \sqrt{t^2 + 1}$$

(2)

$$S(t)^2 \log t = \frac{9}{4} (t^2 + 1) \log t$$

となるので求める定積分は

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} \int_1^e (t^2 + 1) \log t \, dt &= \frac{9}{4} \int_1^e \left( \frac{1}{3} t^3 + t \right)' \log t \, dt \\ &= \frac{9}{4} \left[ \frac{1}{3} t^3 \log t + t \log t \right]_1^e - \frac{9}{4} \int_1^e \left( \frac{1}{3} t^3 + t \right) (\log t)' \, dt \\ &= \frac{9}{4} \left( \frac{e^3}{3} + e \right) - \frac{9}{4} \int_1^e \left( \frac{1}{3} t^2 + 1 \right) dt \\ &= \frac{3}{4} e^3 + \frac{9}{4} e - \frac{9}{4} \left[ \frac{1}{9} t^3 + t \right]_1^e \\ &= \frac{3}{4} e^3 + \frac{9}{4} e - \frac{9}{4} \left( \frac{1}{9} e^3 + e - \frac{10}{9} \right) \\ &= \frac{e^3 + 5}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{e^3 + 5}{2}$$