

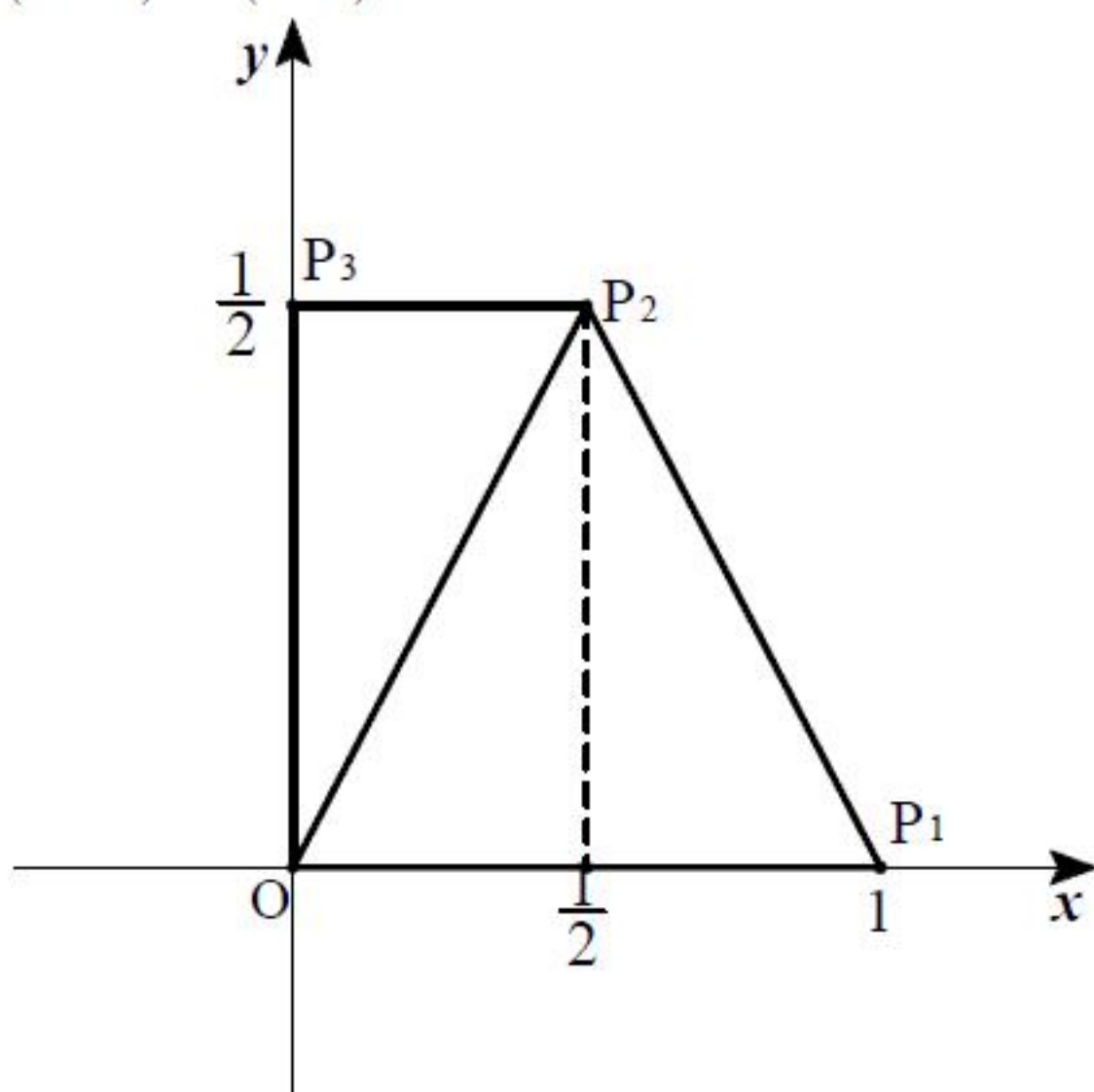
1

(1)

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

よって  $P_2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ ,  $P_3 \left( 0, \frac{1}{2} \right)$  となるから以下の図をえる。



(2)

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_n - b_n \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} 2a_{n+1} = a_n - b_n \\ 2b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

であるから、三角形の面積の公式をもちいて

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} |a_{n+1}b_{n+2} - a_{n+2}b_{n+1}| \\ &= \frac{1}{2} \left| a_{n+1} \times \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} - \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{2} \times b_{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{4} |a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2| \\ &= \frac{1}{4} \left| \frac{(a_n - b_n)^2 + (a_n + b_n)^2}{4} \right| \\ &= \frac{1}{8} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} |a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n| \\ &= \frac{1}{2} \left| a_n \times \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{a_n - b_n}{2} \times b_n \right| \\ &= \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

よって

$$S_n : S_{n+1} = 2 : 1$$

…(答)

(3)

$S_n$  は初項  $S_1$ 、公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列をなすので

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{2}} = |a_1b_2 - a_2b_1| = \frac{1}{2}$$

…(答)

(1)

$$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}$$

より

(i)  $-\frac{a}{2} \leq -1$ , つまり  $a \geq 2$  のとき

$$M(a) = f(1) = a + \frac{9}{8}$$

$$m(a) = f(-1) = -a + \frac{9}{8}$$

(ii)  $-1 \leq -\frac{a}{2} \leq 0$ , つまり  $0 \leq a \leq 2$  のとき

$$M(a) = f(1) = a + \frac{9}{8}$$

$$m(a) = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}$$

(iii)  $0 \leq -\frac{a}{2} \leq 1$ , つまり  $-2 \leq a \leq 0$  のとき

$$M(a) = f(-1) = -a + \frac{9}{8}$$

$$m(a) = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}$$

(iv)  $1 \leq -\frac{a}{2}$ , つまり  $a \leq -2$  のとき

$$M(a) = f(-1) = -a + \frac{9}{8}$$

$$m(a) = f(1) = a + \frac{9}{8}$$

以上から

$$M(a) = \begin{cases} -a + \frac{9}{8} & (a \leq 0) \\ a + \frac{9}{8} & (a \geq 0) \end{cases}$$

$$m(a) = \begin{cases} a + \frac{9}{8} & (a \leq -2) \\ -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8} & (-2 \leq a \leq 2) \\ -a + \frac{9}{8} & (a \geq 2) \end{cases}$$

…(答)

(2)

$$x^2 + ax + \frac{1}{8} = |x|$$

より

$$\begin{cases} x^2 + (a-1)x + \frac{1}{8} = 0 & (x \geq 0) \\ x^2 + (a+1)x + \frac{1}{8} = 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

となる。これが4つの異なる実数解を持つためには、 $x \geq 0$ 、 $x \leq 0$ でそれぞれ2つの異なる実数解を持つ必要がある。

$$x^2 + (a-1)x + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \frac{1-2(a-1)^2}{8} = 0$$

が  $x \geq 0$  で異なる2つの解をもつ条件は、

$$\begin{cases} -\frac{a-1}{2} > 0 \\ \frac{1-2(a-1)^2}{8} < 0 \end{cases}$$

よって

$$a < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

 $x=0$  のとき左辺は正だが右辺は0となるため、 $x=0$  は解にならない。よってこの条件の下、異なる2つの正の解をもつ。また、

$$x^2 + (a+1)x + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{1-2(a+1)^2}{8} = 0$$

が  $x \leq 0$  で異なる2つの解をもつ条件は、

$$\begin{cases} -\frac{a+1}{2} < 0 \\ \frac{1-2(a+1)^2}{8} < 0 \end{cases}$$

よって

$$a > \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

 $x=0$  のとき左辺は正だが右辺は0となるため、 $x=0$  は解にならない。よってこの条件の下、異なる2つの負の解をもつ。

以上より、相違なる4つの解をもつ条件は

$$\frac{-2+\sqrt{2}}{2} < a < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

…(答)

(3)

$$M(a) - m(a) = \begin{cases} 2a & (a \geq 2) \\ \frac{1}{4}a^2 + a + 1 & (0 \leq a \leq 2) \\ \frac{1}{4}a^2 - a + 1 & (-2 \leq a \leq 0) \\ -2a & (a \leq -2) \end{cases}$$

であるから、(2)の範囲において、

(i)  $0 \leq a < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  のとき

$$M(a) - m(a) = \frac{1}{4}(a+2)^2$$

より

$$\min(M(a) - m(a)) = M(0) - m(0) = 1$$

(ii)  $\frac{-2+\sqrt{2}}{2} < a \leq 0$  のとき

$$M(a) - m(a) = \frac{1}{4}(a-2)^2$$

より

$$\min(M(a) - m(a)) = M(0) - m(0) = 1$$

以上から最小となるときの  $a$  の値は  $a=0$ 

…(答)

- (1)  $\overrightarrow{AB}=(2,0,-1)$ ,  $\overrightarrow{AC}=(0,2,-1)$ であるから

$$\begin{cases} (a,b,1) \cdot (2,0,-1)=0 \\ (a,b,1) \cdot (0,2,-1)=0 \end{cases}$$

よって

$$a=b=\frac{1}{2} \quad \dots(\text{答})$$

- (2)  $\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+(1-s-t)\overrightarrow{OC}$   
と表すことができるので(ただし,  $s, t$  は実数)

$$\overrightarrow{OH}=(2t, 2-2s-2t, s)$$

また,  $\overrightarrow{OH}$  と  $\vec{v}$  は平行なので

$$\overrightarrow{OH}=k\vec{v}$$

という関係がある(ただし,  $k$  は実数)。よって

$$k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)=(2t, 2-2s-2t, s)$$

これより

$$\begin{cases} k=\frac{2}{3} \\ t=\frac{1}{6} \\ s=\frac{2}{3} \end{cases}$$

よって

$$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \dots(\text{答})$$

- (3) 四面体 OABC の体積は

$$V=\frac{1}{3}\triangle OBC \times OA$$

$$=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} OB \times OC \times OA$$

$$=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 = \frac{2}{3} \quad \dots(\text{答})$$

また

$$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

であるから, 三角形 ABC の面積  $S$  は,

$$V=\frac{1}{3}S \times |\overrightarrow{OH}|$$

より

$$S=\frac{3V}{|\overrightarrow{OH}|}=\sqrt{6} \quad \dots(\text{答})$$

- (4) 三角形 OAB, 三角形 OBC, 三角形 OCA の面積はそれぞれ  
1, 2, 1

であるから, 四面体 OABC の体積は

$$V=\frac{1}{3}r(1+2+1+\sqrt{6})=\frac{4+\sqrt{6}}{3}r$$

と表すことができるので

$$\frac{4+\sqrt{6}}{3}r=\frac{2}{3}$$

より

$$r=\frac{4-\sqrt{6}}{5} \quad \dots(\text{答})$$

(1)

$$y' = -\frac{k(1+x^2) - 2kx^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{k(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = -\frac{-2kx(1+x^2)^2 - 4kx(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = -\frac{2kx(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$$

これより、 $y''=0$  となるのは

$$x=0, \pm\sqrt{3}$$

となり、この値の前後で  $y''$  の符号が変わるので、変曲点となる。

よってその座標は

$$(0, 1), \left( \sqrt{3}, \frac{4-\sqrt{3}k}{4} \right), \left( -\sqrt{3}, \frac{4+\sqrt{3}k}{4} \right) \quad \dots(\text{答})$$

(2)

点  $\left( \sqrt{3}, \frac{4-\sqrt{3}k}{4} \right)$  における接線の方程式は、傾きが

$$y' = -\frac{k(1-3)}{(1+3)^2} = \frac{k}{8}$$

より

$$y = \frac{k}{8}(x - \sqrt{3}) + \frac{4 - \sqrt{3}k}{4} = \frac{k}{8}x + \frac{8 - 3\sqrt{3}k}{8}$$

これが原点を通るので

$$\frac{8 - 3\sqrt{3}k}{8} = 0$$

よって

$$k = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{9}\sqrt{3} \quad \dots(\text{答})$$

(3)

曲線  $C$  の方程式は

$$y = 1 - \frac{8\sqrt{3}x}{9(1+x^2)}$$

接線の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{3}}{9}x$$

であるから、求める図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{8\sqrt{3}x}{9(1+x^2)} - \frac{\sqrt{3}}{9}x \right\} dx &= \left[ x - \frac{4}{9}\sqrt{3} \log(1+x^2) - \frac{\sqrt{3}}{18}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18}(15 - 16\log 2) \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

