

(1)

 $C_1$  と  $C_2$  の交点の  $x$  座標を求める。

$$x^2 + kx = -x^2 + k^2 + \frac{9}{4}k + \frac{9}{8}$$

を解く。移項して分母を払い整理すると、

$$\begin{aligned} 16x^2 + 8kx - (2k+3)(4k+3) &= 0 \\ \{4x - (2k+3)\} \{4x + (4k+3)\} &= 0 \\ \therefore x &= -k - \frac{3}{4}, \frac{1}{2}k + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。 $k$  はコインを投げて表が出た枚数なので、 $k \geq 0$  である。よって、

$$-k - \frac{3}{4} < \frac{1}{2}k + \frac{3}{4}$$

である。 $C_1$  は下に凸で、 $C_2$  は上に凸である。 $\alpha = -k - \frac{3}{4}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}k + \frac{3}{4}$  とおくと、これらで囲まれた図形の面積は、

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left( -x^2 + k^2 + \frac{9}{4}k + \frac{9}{8} \right) - (x^2 + kx) \right\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{2}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2}k + \frac{3}{2} \right)^3 \\ &= \frac{9}{8} (k+1)^3 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S_k = \frac{9}{8} (k+1)^3$$

(2)

 $S_k \leq 9$  を解く。(1)より、

$$\begin{aligned} \frac{9}{8} (k+1)^3 &\leq 9 \\ (k+1)^3 &\leq 8 \\ k+1 &\leq 2 \\ k &\leq 1 \end{aligned}$$

よって求める確率は、 $n$  枚のコインを投げたときに表が出た枚数が 0 枚または 1 枚となる確率である。 $n$  枚のコインを投げるときの表裏の出方は全部で  $2^n$  通りある。表が出た枚数が 0 枚となるのは全て裏の場合なので、その確率は  $\frac{1}{2^n}$  である。表が出た枚数が 1 枚となる場合は、どのコインが表になるかで  ${}_nC_1 = n$  通りあるので、その確率は  $\frac{n}{2^n}$  である。よってこれらを足し合わせて、求める確率は  $\frac{n+1}{2^n}$  である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n+1}{2^n}$$

(3)

(1)で求めた式を代入すると、

$$\begin{aligned} \left( \frac{8}{9} S_k \right)^{\frac{1}{3}} &= \left( \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8} (k+1)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= k+1 \end{aligned}$$

となる。 $n=5$  のとき、表が  $k$  枚出る確率は  $\frac{{}_5C_k}{2^5}$  なので、求める期待値は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 \frac{{}_5C_k}{2^5} (k+1) &= \frac{1}{2^5} (1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 6) \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{7}{2}$$

(1)

$\overline{AB} = (2, 0, -1)$ ,  $\overline{AC} = (0, 2, -1)$  である。 $\vec{v}$  がこれらと直交する条件は,

$$\vec{v} \cdot \overline{AB} = \vec{v} \cdot \overline{AC} = 0$$

$$2a - 1 = 2b - 1 = 0$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \quad a = b = \frac{1}{2}$$

(2)

$\overline{OH}$  の方向は  $\vec{v}$  と等しい。そこで実数  $\alpha$  を用いて,  $\overline{OH} = (\alpha, \alpha, 2\alpha)$  と書ける。

このとき点  $(\alpha, \alpha, 2\alpha)$  が平面  $ABC$  上にあるので, 実数  $s, t$  を用いて,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2s = \alpha \\ 2t = \alpha \\ 1 - s - t = 2\alpha \end{cases}$$

となる。これを解いて

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

を得る。よって

$$\overline{OH} = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$(\text{答}) \quad \overline{OH} = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

(3)

$\triangle OBC$  を底面と考えると, 底面は  $OB = OC = 2$  の直角二等辺三角形で,

高さは  $OA = 1$  なので, 四面体  $OABC$  の体積  $V$  は,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

である。

$\triangle ABC$  を底面と考えると, 高さは  $OH$  である。(2)より

$$OH = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。よって,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} S$$

と書ける。 $V = \frac{2}{3}$  であるから,  $S = \sqrt{6}$  となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{2}{3}, \quad S = \sqrt{6}$$

(4)

四面体  $OABC$  に内接する球の中心を  $I$  とおくと, 四面体  $OABC$  は四面体  $IOAB$ , 四面体  $IOBC$ , 四面体  $IOCA$ , 四面体  $IABC$  の 4 つに分解できる。これらの高さは, 四面体  $OABC$  の各面を底面と考えると全て  $r$  である。よって,

$$V = \frac{1}{3} (\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA + \triangle ABC) \cdot r \quad \cdots \textcircled{1}$$

と書ける。 $\triangle OAB$ ,  $\triangle OBC$ ,  $\triangle OCA$  はどれも直角三角形であり, それらの面積は,

$$\begin{cases} \triangle OAB = \triangle OAC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \\ \triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$

である。(3)より  $\triangle ABC = \sqrt{6}$  であり,  $V = \frac{2}{3}$  であるから, ①式は

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} (1 + 1 + 2 + \sqrt{6}) \cdot r$$

と書ける。よって,

$$r = \frac{2}{4 + \sqrt{6}} = \frac{4 - \sqrt{6}}{5}$$

$$(\text{答}) \quad r = \frac{4 - \sqrt{6}}{5}$$

(1)

倍角の公式より,

$$\begin{aligned} a \sin 2x - \cos^2 x &= 2a \sin x \cos x - \cos^2 x \\ &= \cos x (2a \sin x - \cos x) \end{aligned}$$

 $\cos x$  は  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  で正であることから,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2a \sin x - \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2a} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

 $x$  が  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき,  $\tan x$  は単調増加し, 任意の正の値をとるので,

 $f(x) = 0$  の解は確かに 1 つだけ存在する。

(証明終)

また,  $f(x) = 0$  の解を  $t$  とすると,

$$\tan t = \frac{1}{2a}$$

が成り立つ。

$$(\text{答}) \quad \tan t = \frac{1}{2a}$$

(2)

 $f(x)$  は  $0 < x < t$  では負であり,  $t < x < \frac{\pi}{2}$  では正である。よって,

$$I = -\int_0^t f(x) dx + \int_t^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

と分解できる。倍角の公式より,

$$f(x) = a \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} I &= -\left[ -\frac{a}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x \right]_0^t + \left[ -\frac{a}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x \right]_t^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t + t - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\cos 2t + \tan t \sin 2t}{2 \tan t} + t - \frac{\pi}{4} \quad \left( \because a = \frac{1}{2 \tan t} \right) \\ &= \frac{1 - 2 \sin^2 t + 2 \sin^2 t}{2 \tan t} + t - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2 \tan t} + t - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad I = \frac{1}{2 \tan t} + t - \frac{\pi}{4}$$

(3)

 $I$  を  $t$  の関数として微分すると,

$$I' = -\frac{1}{2 \sin^2 t} + 1$$

となる。よって  $I$  の増減表は次のようになる。

|      |          |            |                 |            |                 |
|------|----------|------------|-----------------|------------|-----------------|
| $t$  | 0        | ...        | $\frac{\pi}{4}$ | ...        | $\frac{\pi}{2}$ |
| $I'$ | $\times$ | $-$        | 0               | $+$        | $\times$        |
| $I$  | $\times$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$   | $\nearrow$ | $\times$        |

増減表より,  $I$  の最小値は  $\frac{1}{2}$  であり, このとき  $t = \frac{\pi}{4}$  なので,

$$a = \frac{1}{2 \tan t} = \frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \quad I \text{ は } a = \frac{1}{2} \text{ のとき, 最小値 } \frac{1}{2} \text{ をとる。}$$

(1)

$a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$  のとき,

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = X$$

である。よって  $X^4 = X^3 X = X^2$  であり、以降帰納的に、 $k$  が奇数なら  $X^k = X$ 、偶数なら  $X^k = X^2$  が成り立つ。よって  $S$  の異なる要素は  $X$ ,  $X^2$  のみである。

$$(答) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2)

すべての自然数  $k$  に対して,

$$X^{2k-1} = (2ab)^{k-1} X \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

$k=1$  の場合は、 $\textcircled{1}$  式は  $X = X$  であり成立する。

$k=n$  において,

$$X^{2n-1} = (2ab)^{n-1} X$$

が成り立っていると仮定する。両辺に  $X^2$  をかけると,

$$X^{2n+1} = (2ab)^{n-1} X^3$$

となる。ここで

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & 0 & ab \\ 0 & 2ab & 0 \\ ab & 0 & ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2ab \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = 2abX$$

であるから、 $X^{2n+1} = (2ab)^n X$  となる。つまり  $k=n+1$  においても  $\textcircled{1}$  式が成り立つ。

以上より、すべての自然数  $k$  に対して  $\textcircled{1}$  式が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$ab \neq 0, X \neq O$  であることを考慮すると、 $2ab \neq \pm 1$  のとき、

$X^3 = 2abX$ ,  $X^5 = (2ab)^2 X$ ,  $X^7 = (2ab)^3 X, \dots$  は全て異なるため、

$S$  の要素は無限個ある。よって、 $S$  の要素が 3 個であるためには  $2ab = \pm 1$  が必要である。

(i)  $2ab = 1$  のとき

$X^3 = X$ ,  $X^4 = X^2$  となるため、帰納的に  $k$  が奇数なら  $X^k = X$ ,

偶数なら  $X^k = X^2$  が成り立つ。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix} ab & 0 & ab \\ 0 & 2ab & 0 \\ ab & 0 & ab \end{pmatrix}$$

より、 $X \neq X^2$  であることに注意すると、 $S$  の要素は  $X, X^2$  の 2 個。

(ii)  $2ab = -1$  のとき

$X^3 = -X$ ,  $X^4 = -X^2$  となるため、 $S$  の要素は  $X, X^2, -X, -X^2$  の 4 個。

以上より、 $S$  の要素は 3 個ではないことが示された。

(証明終)