

平成21年度入学者選抜試験
個別学力試験問題（前期日程）

数 学
(医 学 部 医 学 科)

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は4枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
4. 解答用紙の裏面は使わないこと。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときは，小問の結論を明示すること。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ること。

- 1 公正に作られた n 枚のコインを同時に投げるとき、表が出た枚数を k で表す。この k に対して、2つの放物線

$$C_1: y = x^2 + kx, \quad C_2: y = -x^2 + k^2 + \frac{9}{4}k + \frac{9}{8}$$

で囲まれた図形の面積を S_k とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) S_k を求めよ。
- (2) $S_k \leq 9$ となる確率を n を用いて表せ。
- (3) $n = 5$ のとき、 $\left(\frac{8}{9}S_k\right)^{\frac{1}{3}}$ の期待値を求めよ。

- 2 空間に4点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ がある。点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を H とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, b を実数とする。 $\vec{v} = (a, b, 1)$ としたとき、 $\vec{v}$ がベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の両方に直交するような a, b の値を求めよ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ の成分表示を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積 V および $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。
- (4) 四面体 $OABC$ に内接する球の半径 r を求めよ。

3 $a > 0$ とするとき、関数 $f(x) = a \sin 2x - \cos^2 x$ について、次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ は区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ にただ 1 つの解 t をもつことを示せ。
また、この解 t と a との関係式を求めよ。

(2) 積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx$ を (1) で定めた t を用いて表せ。

(3) t の関数として表された積分 I の最小値とそのときの a の値を求めよ。

4 a, b を 0 でない実数とし、 $X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ 、 $S = \{X^n \mid n \text{ は自然数}\}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ のとき、 S の異なる要素をすべて求めよ。

(2) すべての自然数 k に対して $X^{2k-1} = (2ab)^{k-1}X$ となることを示せ。

(3) S の要素は 3 個ではないことを示せ。