

(1)

題意より、

$$x^3 - 7x^2 + 15x + b = (x - a)f(x) + 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。①に $x = a$ を代入すると、

$$a^3 - 7a^2 + 15a + b = 5$$

$$\Leftrightarrow b = -a^3 + 7a^2 - 15a + 5$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = -a^3 + 7a^2 - 15a + 5$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 15x + b &= x^3 - 7x^2 + 15x + (-a^3 + 7a^2 - 15a + 5) \\ &= (x - a)\{x^2 + (a - 7)x + (a^2 - 7a + 15)\} + 5 \end{aligned}$$

となるので、①と比較すると

$$f(x) = x^2 + (a - 7)x + (a^2 - 7a + 15) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。 $f(x)$ は

$$f(x) = \left(x + \frac{a - 7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{7}{2}a + \frac{11}{4}$$

と変形できるので、 $y = f(x)$ の頂点の座標は、

$$\left(-\frac{a - 7}{2}, \frac{3}{4}a^2 - \frac{7}{2}a + \frac{11}{4}\right)$$

となる。これが直線 $y = x - a$ の上にあるので、

$$\frac{3}{4}a^2 - \frac{7}{2}a + \frac{11}{4} = -\frac{a - 7}{2} - a$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 - 2a - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a + 1)(a - 3) = 0$$

が成り立つ。 $a > 0$ のもとでこれを解くと、

$$a = 3$$

となる。これを②に代入すると、

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^2 - 4x + 3$$

(1)

a が 2 個, b が 2 個, c, d, e が 1 個ずつ含まれるので, 7 文字の並べ方は,

$$\frac{7!}{2! 2! 1! 1! 1!} = 1260 \text{ (通り)}$$

(答) 1260 通り

(2)

(a, a) という並びを f とおく。f, b, b, c, d, e の 6 文字の並べ方を考えればいいので,

$$\frac{6!}{1! 2! 1! 1! 1!} = 360 \text{ (通り)}$$

(答) 360 通り

(3)

2 つの a が隣り合う並べ方の数を $n(A)$, 2 つの b が隣り合う並べ方の数を $n(B)$, 7 文字全ての並べ方の数を $n(T)$ とおく。このとき, 2 つの a が隣り合わず, 2 つの b も隣り合わない並べ方の数 $n(\bar{A} \cap \bar{B})$ は,

$$\begin{aligned} n(\bar{A} \cap \bar{B}) &= n(\overline{A \cup B}) \\ &= n(T) - n(A \cup B) \\ &= n(T) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \end{aligned}$$

と表せる。ここで, (2) より

$$n(A) = 360$$

であり, 同様に考えると

$$n(B) = 360$$

が得られる。また, (1) より

$$n(T) = 1260$$

である。さらに, $n(A \cap B)$ は 2 つの a が隣り合い, 2 つの b も隣り合う並べ方の数なので

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= 5! \\ &= 120 \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} n(\bar{A} \cap \bar{B}) &= n(T) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 1260 - (360 + 360 - 120) \\ &= 660 \end{aligned}$$

となる。

(答) 660 通り

(1)

円 C_2 の中心と半径を求める。

$$x^2 + y^2 - 10x + 20 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = a+5$$

よって、 C_2 は中心 $(5, 0)$ 、半径 $\sqrt{a+5}$ の円である。

[1] $\sqrt{a+5} < 4$ のとき

C_1 と C_2 の位置関係は図 1 のようになる。

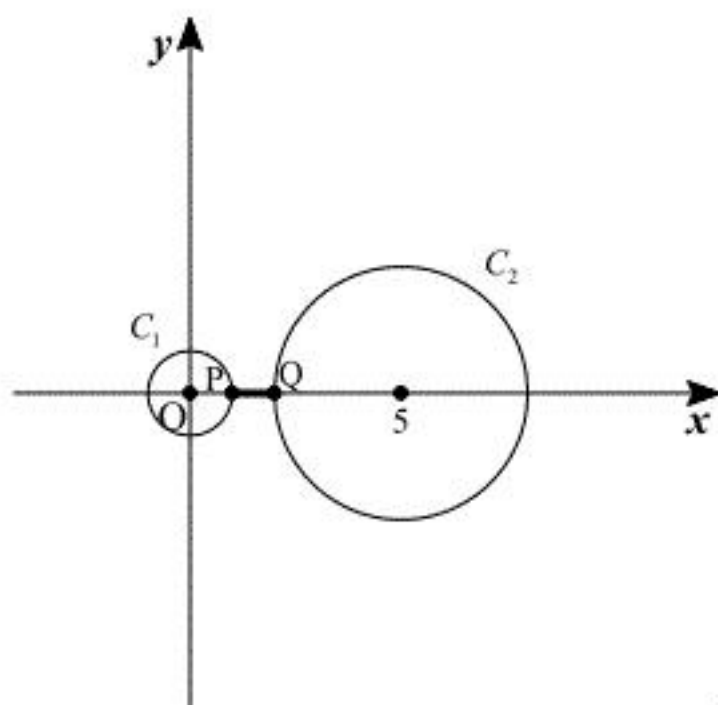


図 1

図 1 のように P, Q を選んだときに距離 PQ が最小になり、最小値は

$$4 - \sqrt{a+5}$$

である。また、 a の範囲は

$$\sqrt{a+5} < 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a < 11 \quad (\because a \geq 0)$$

である。

[2] $4 \leq \sqrt{a+5} \leq 6$ のとき

C_1 と C_2 の位置関係は図 2 のようになる。

C_1 と C_2 が共有点を持つため、P, Q を同一の点に選ぶことができる。

よって、距離 PQ の最小値は

$$0$$

である。

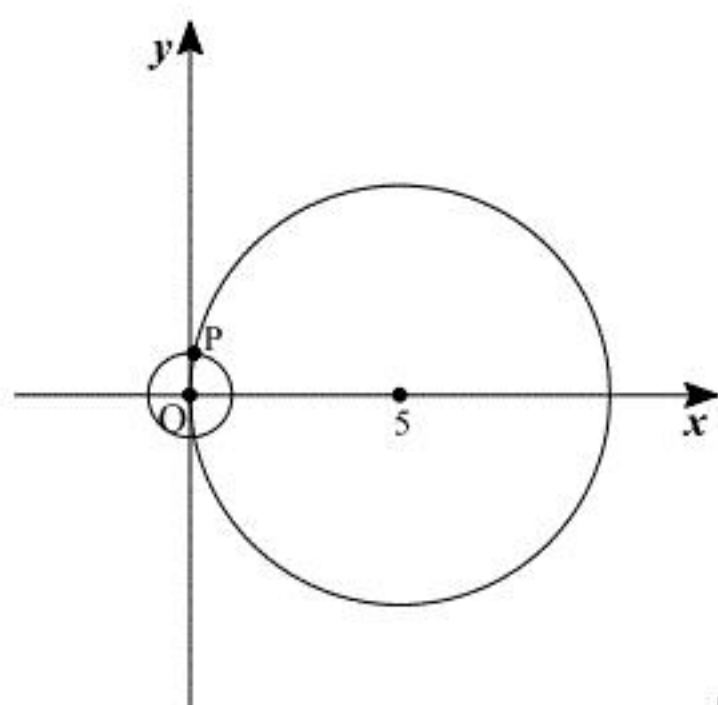


図 2

また、 a の範囲は

$$4 \leq \sqrt{a+5} \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 11 \leq a \leq 31$$

である。

[3] $6 < \sqrt{a+5}$ のとき

C_1 と C_2 の位置関係は図 3 のようになる。

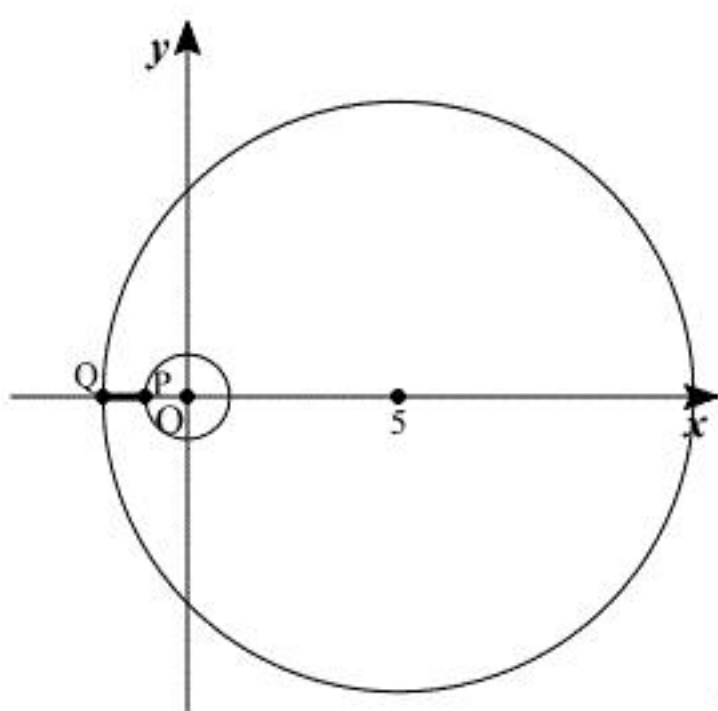


図 3

図 3 のように P, Q を選んだときに距離 PQ が最小になり、最小値は

$$\sqrt{a+5} - 6$$

である。また、 a の範囲は

$$6 < \sqrt{a+5}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} 4 - \sqrt{a+5} & (0 \leq a < 11 \text{ のとき}) \\ 0 & (11 \leq a \leq 31 \text{ のとき}) \\ \sqrt{a+5} - 6 & (31 < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

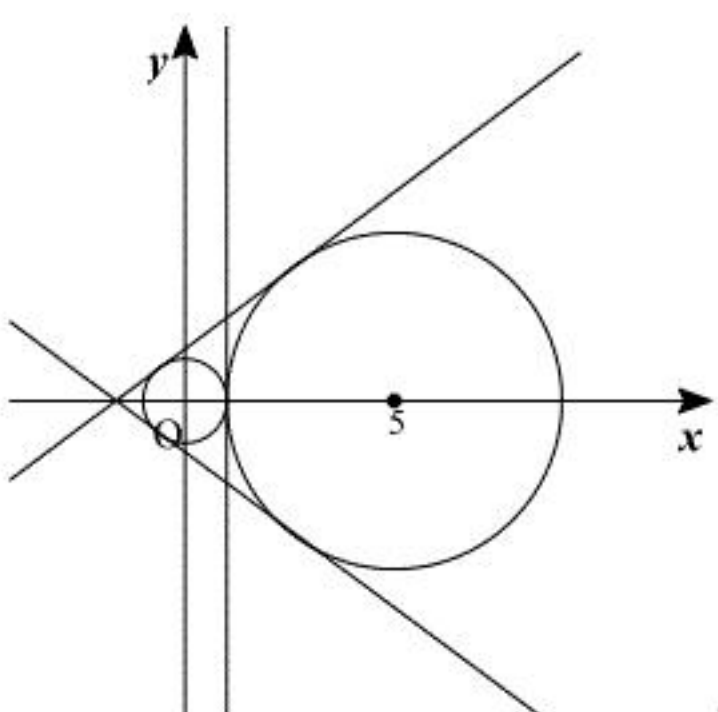


図 4

$a=11$ のとき、図 4 のように C_1 と C_2 は接する。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線が円 C_1 上の点 (p, q) を通るとする。このとき、

$$p^2 + q^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立ち、接線の方程式は、

$$px + qy = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

と書ける。②と円 C_2 の中心 $(5, 0)$ の距離が 4 であることから、点と直線の距離の公式を用いて、

$$\frac{|5p-1|}{\sqrt{p^2+q^2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |5p-1| = 4 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\Leftrightarrow 5p-1 = \pm 4$$

$$\therefore p = 1, -\frac{3}{5}$$

となる。これを①に代入し、円 C_1 上の接点の座標を求めると、

$$(p, q) = (1, 0), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

となる。各接点の座標を②に代入し、接線の方程式を求めると、

$$x=1, -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y=1, -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y=1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x=1, -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y=1, -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y=1$$