

(1)

題意より、

$$x^3 - 7x^2 + 15x + b = (x - a)f(x) + 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。①に $x = a$ を代入すると、

$$a^3 - 7a^2 + 15a + b = 5$$

$$\Leftrightarrow b = -a^3 + 7a^2 - 15a + 5$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = -a^3 + 7a^2 - 15a + 5$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 15x + b &= x^3 - 7x^2 + 15x + (-a^3 + 7a^2 - 15a + 5) \\ &= (x - a)\{x^2 + (a - 7)x + (a^2 - 7a + 15)\} + 5 \end{aligned}$$

となるので、①と比較すると

$$f(x) = x^2 + (a - 7)x + (a^2 - 7a + 15) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。 $f(x)$ は

$$f(x) = \left(x + \frac{a - 7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{7}{2}a + \frac{11}{4}$$

と変形できるので、 $y = f(x)$ の頂点の座標は、

$$\left(-\frac{a - 7}{2}, \frac{3}{4}a^2 - \frac{7}{2}a + \frac{11}{4}\right)$$

となる。これが直線 $y = x - a$ の上にあるので、

$$\frac{3}{4}a^2 - \frac{7}{2}a + \frac{11}{4} = -\frac{a - 7}{2} - a$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 - 2a - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a + 1)(a - 3) = 0$$

が成り立つ。 $a > 0$ のもとでこれを解くと、

$$a = 3$$

となる。これを②に代入すると、

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^2 - 4x + 3$$

2

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{a}| &= \sqrt{\left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(n^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2} \\ &= \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \\ |\overline{b}| &= \sqrt{\left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(1 - n^{\frac{1}{4}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} - 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \\ \overline{a} \cdot \overline{b} &= \left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(n^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(1 - n^{\frac{1}{4}}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| |\overline{b}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} - 2n^{\frac{1}{4}} + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(2n^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 - \left(2n^{\frac{1}{4}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4n + 1}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{4n + 1}}$

(2)

(1)より,

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{4n + 1}$$

である。 n は自然数であるから,

$$\sqrt{4n + 1} \geq \sqrt{5} > 2$$

である。よって, 3 以上の自然数 p_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) を用いて

$$\sqrt{4n_i + 1} = p_i$$

と表せる。両辺を 2 乗して整理すると,

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{p_i^2 - 1}{4} \\ &= \frac{(p_i + 1)(p_i - 1)}{4} \end{aligned}$$

となる。これが成り立つような自然数 n_i が存在するための必要十分条件は, $(p_i + 1), (p_i - 1)$ が共に正の偶数となることである。したがって, p_i は 3 以上の奇数であるから,

$$p_i = 2i + 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{(2i + 2) \times 2i}{4} \\ &= i(i + 1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $n_i = i(i + 1)$

(3)

(1)(2)より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta_i} &= 4n_i + 1 \\ &= 4i(i + 1) + 1 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan^2 \theta_i} &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta_i} - 1} \\ &= \frac{1}{4i(i + 1)} \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\tan^2 \theta_i} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{4i(i + 1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{k + 1} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{1}{4}$