

(1) C と l の方程式を連立する。

$$\begin{aligned}(x-k)^2+n-k&=x+n-k \\ \Leftrightarrow x^2-(2k+1)x+k^2&=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

①の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned}D&=(2k+1)^2-4k^2 \\ &=4k+1\end{aligned}$$

k は負でない整数であるから、

$$D>0$$

となる。よって、 C と l は常に異なる 2 つの交点を持つ。よって、求める確率は $\mathbf{1}$ である。

(答) $\mathbf{1}$

(2) ①の 2 実数解を α, β ($\alpha<\beta$) とおくと、

$$\alpha=\frac{(2k+1)-\sqrt{D}}{2}, \beta=\frac{(2k+1)+\sqrt{D}}{2}$$

となり、これが C と l の 2 交点の x 座標である。よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{\alpha}^{\beta}\left[(x+n-k)-\{(x-k)^2+n-k\}\right]dx \\ &=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &=\frac{1}{6}(\sqrt{D})^3 \\ &=\frac{1}{6}(4k+1)^{\frac{3}{2}} \quad (\because D=4k+1)\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S=\frac{1}{6}(4k+1)^{\frac{3}{2}}$$

(3) (2)より、

$$(6S)^{\frac{2}{3}}=4k+1$$

である。1 枚のコインを投げて表・裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ なので、 $n=3$ のときに表が k 枚

出る確率を P_k 、 $(6S)^{\frac{2}{3}}$ の値を S_k とおくと、

$$\begin{cases} P_0={}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8} \\ P_1={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8} \\ P_2={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8} \\ P_3={}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_0=1 \\ S_1=5 \\ S_2=9 \\ S_3=13 \end{cases}$$

となる。よって、求める期待値は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^3S_kP_k&=1\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{3}{8}+9\cdot\frac{3}{8}+13\cdot\frac{1}{8} \\ &=7\end{aligned}$$

となる。

(答) $\mathbf{7}$

2

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{a}| &= \sqrt{\left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(n^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2} \\ &= \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \\ |\overline{b}| &= \sqrt{\left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(1 - n^{\frac{1}{4}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} - 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \\ \overline{a} \cdot \overline{b} &= \left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(n^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(1 - n^{\frac{1}{4}}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| |\overline{b}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} - 2n^{\frac{1}{4}} + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(2n^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 - \left(2n^{\frac{1}{4}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4n + 1}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{4n + 1}}$

(2)

(1)より,

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{4n + 1}$$

である。 n は自然数であるから,

$$\sqrt{4n + 1} \geq \sqrt{5} > 2$$

である。よって, 3 以上の自然数 p_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) を用いて

$$\sqrt{4n_i + 1} = p_i$$

と表せる。両辺を 2 乗して整理すると,

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{p_i^2 - 1}{4} \\ &= \frac{(p_i + 1)(p_i - 1)}{4} \end{aligned}$$

となる。これが成り立つような自然数 n_i が存在するための必要十分条件は, $(p_i + 1), (p_i - 1)$ が共に正の偶数となることである。したがって, p_i は 3 以上の奇数であるから,

$$p_i = 2i + 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{(2i + 2) \times 2i}{4} \\ &= i(i + 1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $n_i = i(i + 1)$

(3)

(1)(2)より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta_i} &= 4n_i + 1 \\ &= 4i(i + 1) + 1 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan^2 \theta_i} &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta_i} - 1} \\ &= \frac{1}{4i(i + 1)} \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\tan^2 \theta_i} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{4i(i + 1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{k + 1} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{1}{4}$

(1)

 p を x によらない定数として

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t dt = p \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける。すると、

$$f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{2} p \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②を①に代入すると、

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 t + 2\sqrt{2} p) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 t \cos t + 2\sqrt{2} p \cos t) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 t + 2\sqrt{2} p \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} + 2p \\ \therefore p &= -\frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

これを②に代入すると、

$$f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{3}$$

(2)

$$g(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x + \int_0^x g'(t) \cos t dt \quad \dots \textcircled{3}$$

の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \cos 2x + g'(x) \cos x \\ \Leftrightarrow (1 - \cos x) g'(x) &= 1 - \cos 2x \\ \Leftrightarrow (1 - \cos x) g'(x) &= 2(1 - \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow (1 - \cos x) \{g'(x) - 2(1 + \cos x)\} &= 0 \end{aligned}$$

これが全ての実数 x に対して成り立つので、

$$g'(x) = 2(1 + \cos x)$$

である。両辺を x で積分すると

$$g(x) = 2(x + \sin x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots \textcircled{4}$$

ここで、③に $x = 0$ を代入すると、

$$g(0) = 0$$

であり、④に $x = 0$ を代入すると、

$$g(0) = C$$

であるから、

$$C = 0$$

である。よって、

$$g(x) = 2(x + \sin x)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = 2(x + \sin x)$$

(1)

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = X^2 X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

(1)より,

$$X^3 = -E$$

であるから,

$$X^6 = X^3 X^3 = E$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} X^{101} &= X^{6 \times 16 + 5} \\ &= E^{16} X^5 \\ &= X^3 X^2 \\ &= -EX^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad X^{101} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$Y = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + E$$

とおく。このとき,

$$\begin{aligned} Y &= X^3 X^2 + X^3 X + X^3 + X^2 + X + E \\ &= -X^2 - X - E + X^2 + X + E \\ &= O \end{aligned}$$

となる。すると,

$$\begin{aligned} X^{101} + X^{100} + X^{99} + X^{98} + \cdots + X + E &= (X^{96} + X^{90} + \cdots + X^6 + E)Y \\ &= O \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} X^{100} + X^{99} + X^{98} + \cdots + X + E &= -X^{101} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\because (2)) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X^{100} + X^{99} + X^{98} + \cdots + X + E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$