

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項は、それぞれ

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^n \\ b_n &= 11 + 8(n-1) \\ &= 8n + 3 \end{aligned}$$

となる。 l, m を自然数としたとき、

$$a_l = b_m$$

が成り立つとすると、

$$3^l = 8m + 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 l, m の組は、小さい方から

$$(l, m) = (3, 3), (5, 30), (7, 273), \dots$$

となる。よって、 $l = 2k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) のときに $\textcircled{1}$ を満たす自然数 m が存在すると予想できる。これを数学的帰納法によって示す。

[1] $k = 1$ のときは、確かに成り立つ。

[2] $k = p$ (p は自然数) のときに成り立つ、つまり

$$3^{2p+1} = 8q + 3 \quad (q \text{ は自然数})$$

が成り立つと仮定すると、 $k = p + 1$ のときは

$$\begin{aligned} 3^{2p+3} &= 9(8q + 3) \\ &= 8(9q + 3) + 3 \end{aligned}$$

となり、確かに $\textcircled{1}$ を満たす自然数 m が存在する。

[1][2]より、 $l = 2k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) のときは $a_l = b_m$ を満たす自然数 m が存在することが示された。逆に、 $l = 2k + 2$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) のときは、 m' を自然数として

$$\begin{aligned} 3^{2k+2} &= 3 \cdot 3^{2k+1} \\ &= 3(8m' + 3) \\ &= 8(3m' + 1) + 1 \end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 m は存在しない。

したがって、数列 $\{c_n\}$ の一般項は、

$$c_n = 3^{2n+1}$$

となる。

(答) $c_n = 3^{2n+1}$

(1)

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}| &= \sqrt{\left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(n^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2} \\
 &= \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \\
 |\vec{b}| &= \sqrt{\left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(1 - n^{\frac{1}{4}}\right)^2} \\
 &= \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} - 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(n^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(n^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(1 - n^{\frac{1}{4}}\right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2n^{\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{1}{4}} + 1} \sqrt{2n^{\frac{1}{2}} - 2n^{\frac{1}{4}} + 1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\left(2n^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 - \left(2n^{\frac{1}{4}}\right)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4n + 1}}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{4n + 1}}$$

(2)

(1)より,

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{4n + 1}$$

である。 n は自然数であるから,

$$\sqrt{4n + 1} \geq \sqrt{5} > 2$$

である。よって、3以上の自然数 p_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) を用いて

$$\sqrt{4n_i + 1} = p_i$$

と表せる。両辺を2乗して整理すると,

$$\begin{aligned}
 n_i &= \frac{p_i^2 - 1}{4} \\
 &= \frac{(p_i + 1)(p_i - 1)}{4}
 \end{aligned}$$

となる。これが成り立つような自然数 n_i が存在するための必要十分条件は、 $(p_i + 1), (p_i - 1)$ が共に正の偶数となることである。したがって、 p_i は3以上の奇数であるから、

$$p_i = 2i + 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned}
 n_i &= \frac{(2i + 2) \times 2i}{4} \\
 &= i(i + 1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad n_i = i(i + 1)$$

(3)

(1)(2)より,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\cos^2 \theta_i} &= 4n_i + 1 \\
 &= 4i(i + 1) + 1
 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tan^2 \theta_i} &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta_i} - 1} \\
 &= \frac{1}{4i(i + 1)}
 \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned}
 S_k &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\tan^2 \theta_i} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{4i(i + 1)} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i + 1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{k + 1} \right)
 \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{1}{4}$$

(1)

 p を x によらない定数として

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t dt = p \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける。すると、

$$f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{2}p \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②を①に代入すると、

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 t + 2\sqrt{2}p) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 t \cos t + 2\sqrt{2}p \cos t) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 t + 2\sqrt{2}p \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} + 2p \\ \therefore p &= -\frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

これを②に代入すると、

$$f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{3}$$

(2)

$$g(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x + \int_0^x g'(t) \cos t dt \quad \dots \textcircled{3}$$

の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \cos 2x + g'(x) \cos x \\ \Leftrightarrow (1 - \cos x) g'(x) &= 1 - \cos 2x \\ \Leftrightarrow (1 - \cos x) g'(x) &= 2(1 - \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow (1 - \cos x) \{g'(x) - 2(1 + \cos x)\} &= 0 \end{aligned}$$

これが全ての実数 x に対して成り立つので、

$$g'(x) = 2(1 + \cos x)$$

である。両辺を x で積分すると

$$g(x) = 2(x + \sin x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots \textcircled{4}$$

ここで、③に $x=0$ を代入すると、

$$g(0) = 0$$

であり、④に $x=0$ を代入すると、

$$g(0) = C$$

であるから、

$$C = 0$$

である。よって、

$$g(x) = 2(x + \sin x)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = 2(x + \sin x)$$

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \\ &= 0\end{aligned}$$

(答) 0

(2)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

とおく。

$$\begin{aligned}f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} \\ &= -\frac{x^3}{x^2-1} \\ &= -f(x)\end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ は奇関数である。よって、 $x \geq 0$ の範囲についてグラフの増減、凹凸を調べれば十分である。 $f(x)$ の1回微分、2回微分を求めると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x^3)'(x^2-1) - x^3(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(x^4-3x^2)'(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)\{(x^2-1)^2\}'}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{3} \\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

となるので、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	(1)	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	0	-		-	0	+
$f''(x)$	0	-		+	+	+
$f(x)$	0				$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	

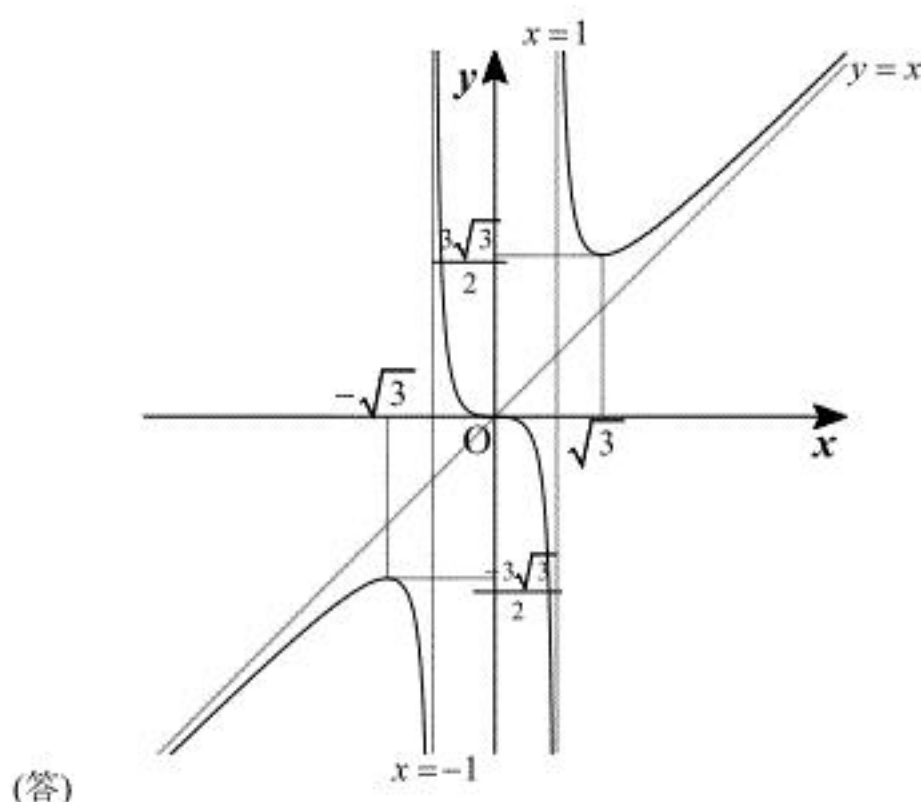
$x=1$ における極限を求めると、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2-1} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2-1} &= -\infty\end{aligned}$$

となる。また、(1)より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = 0$$

であるから、 $y=x$ が漸近線となる。さらに、 $f(x)$ が奇関数であることに注意すると、グラフの概形は次図のようになる。



(答)

(3)

$$\begin{aligned}x^3 - kx^2 + k &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 &= k(x^2-1)\end{aligned}$$

$x=\pm 1$ は、この方程式の解ではないので、

$$k = \frac{x^3}{x^2-1}$$

のように変形できる。よって、

$$x^3 - kx^2 + k = 0$$

の異なる実数解の個数は、 $y=k$ と $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ のグラフの共有点の個数に等しい。

(2)のグラフより、共有点の個数は

$$\begin{cases} |k| > \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ |k| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ |k| < \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$

である。

$$(答) \begin{cases} |k| > \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ |k| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ |k| < \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$