

平成22年度入試
個別学力試験問題（前期日程）

数 学
（数理・情報システム学科）

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は4枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
4. 解答用紙の裏面は使わないこと。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときは，小問の結論を明示すること。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ること。

- 1 公正に作られた n 枚のコインを同時に投げるとき、表が出た枚数を k で表す。この n, k を用いて、放物線 C と直線 l を

$$C: y = (x - k)^2 + n - k,$$

$$l: y = x + n - k$$

で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) C と l が異なる 2 つの交点をもつ確率を求めよ。
- (2) C と l で囲まれた図形の面積 S を k を用いて表せ。
- (3) $n = 3$ のとき、 $(6S)^{\frac{2}{3}}$ の期待値を求めよ。

- 2 自然数 n に対して、ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を

$$\vec{a} = (n^{\frac{1}{4}}, n^{\frac{1}{4}} + 1), \quad \vec{b} = (n^{\frac{1}{4}}, 1 - n^{\frac{1}{4}})$$

で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ を n を用いて表せ。
- (2) $\frac{1}{\cos \theta}$ が整数となるような n を小さい順に $n_1, n_2, \dots$ とするとき、 i 番目の n_i を i を用いて表せ。
- (3) $n = n_i$ に対する $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ_i とおく。自然数 k に対して、

$$S_k = \frac{1}{\tan^2 \theta_1} + \frac{1}{\tan^2 \theta_2} + \dots + \frac{1}{\tan^2 \theta_k}$$

とするとき、 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ を求めよ。

3

次の問いに答えよ。

- (1) すべての実数
- x
- に対して次の等式を満たす関数
- $f(x)$
- を求めよ。

$$f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \cos t \, dt$$

- (2) すべての実数
- x
- に対して次の等式を満たす関数
- $g(x)$
- を求めよ。

$$g(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x + \int_0^x g'(t) \cos t \, dt$$

ただし、 $g(x)$ は微分可能で、その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする。

4

3 次正方行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) X^2 と X^3 を求めよ。
- (2) X^{101} を求めよ。
- (3) $X^{100} + X^{99} + X^{98} + \cdots + X + E$ を求めよ。