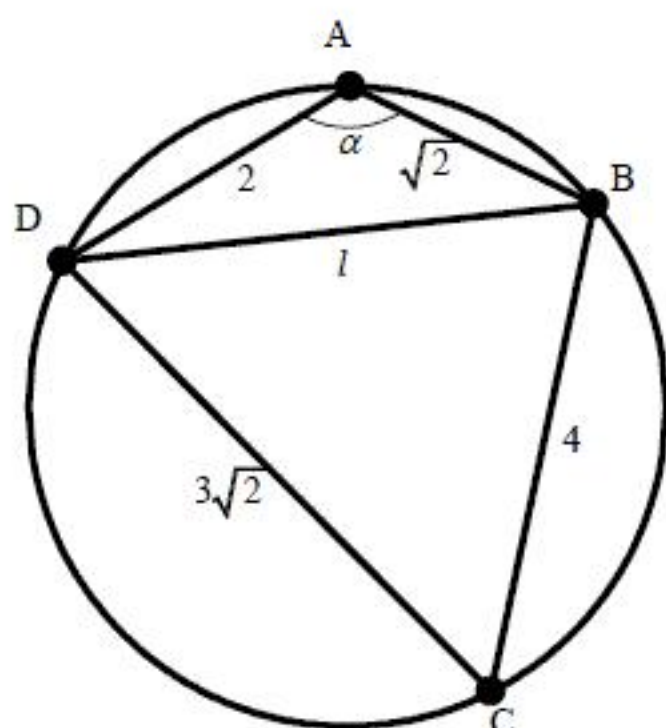




(1)

$\triangle ABD$ で余弦定理より,

$$l^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha = 6 - 4\sqrt{2} \cos \alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また, $\angle DCB = 180^\circ - \alpha$ であるから, $\triangle CBD$ で余弦定理より,

$$l^2 = (3\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = 34 + 24\sqrt{2} \cos \alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①, ②より,

$$6 - 4\sqrt{2} \cos \alpha = 34 + 24\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \alpha = 135^\circ$$

となる。これを①に代入すると,

$$l^2 = 6 - 4\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 10$$

$$\therefore l = \sqrt{10}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad l = \sqrt{10}, \alpha = 135^\circ$$

(2)

$$S = (\triangle ABD \text{ の面積}) + (\triangle CBD \text{ の面積})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 135^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ$$

$$= 1 + 6$$

$$= 7$$

となる。

(答) 7

(3)

R は $\triangle ABD$ の外接円の半径に等しいから, $\triangle ABD$ において正弦定理より,

$$\frac{\sqrt{10}}{\sin 135^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{10}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad R = \sqrt{5}$$

(1)

2次方程式

$$x^2 + 2ax + (a-1) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a-1) = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

であるから、 $\textcircled{1}$ の解 α, β は異なる実数となる。

(証明終)

(2)

 $\textcircled{1}$ において、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2a & \dots \textcircled{2} \\ \alpha\beta = a-1 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

 α, β が両方 0 以上と仮定すると、 $\textcircled{2}$ より $a \leq 0$ となるが、

このとき、

$$\begin{cases} \textcircled{3} \text{の左辺} \geq 0 \\ \textcircled{3} \text{の右辺} \leq -1 \end{cases}$$

となり、矛盾が生じる。したがって、 α, β のうち少なくとも 1 つは負となる。

(証明終)

(3)

(1)より α, β はともに実数だから、

$$\alpha \leq 0, \beta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta \leq 0 \text{ かつ } \alpha\beta \geq 0$$

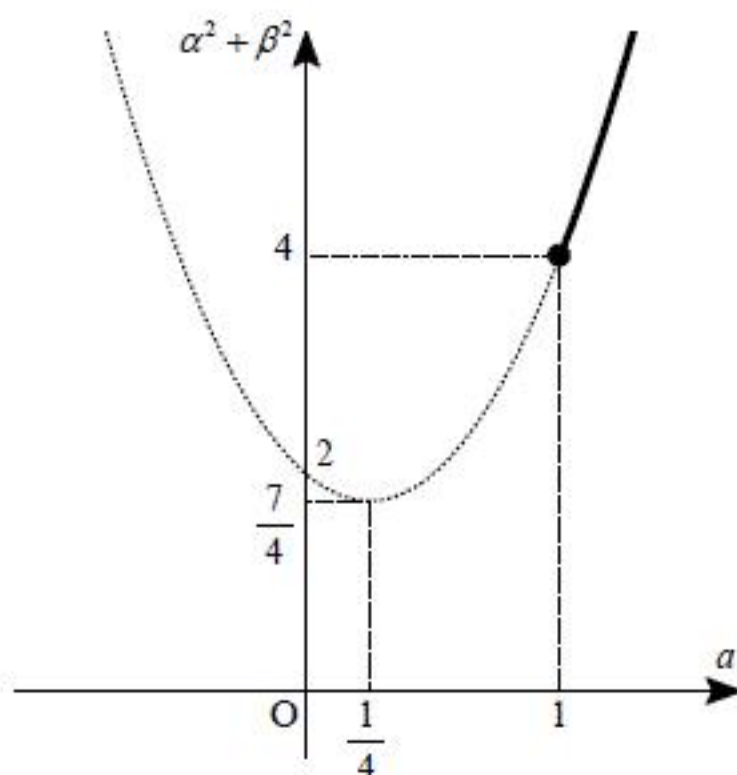
$$\Leftrightarrow -2a \leq 0 \text{ かつ } a-1 \geq 0$$

$$\therefore a \geq 1$$

である。また、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2 - 2(a-1) \\ &= 4a^2 - 2a + 2 \\ &= 4\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

である。

したがって、上図より $a=1$ のときに、 $\alpha^2 + \beta^2$ は最小値 4 をとる。

(答) 4

(1)

C_0 について、 $y' = -2x$ であるから、求める接線の方程式は、

$$y = -2a(x-a) - a^2$$

$$\therefore y = -2ax + a^2$$

となる。

(答) $y = -2ax + a^2$

(2)

(1)で求めた接線が点Pを通るとすると、接点のx座標 a は

$$(p-1)^2 = -2ap + a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2pa - (p-1)^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。①の判別式を D とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= p^2 + (p-1)^2 \\ &= 2p^2 - 2p + 1 \\ &= 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

であるから、 p の値によらず、①は2つの異なる実数解をもつ。したがって、任意の点Pに対して、点Pを通り、 C_0 に接する直線は2本ある。

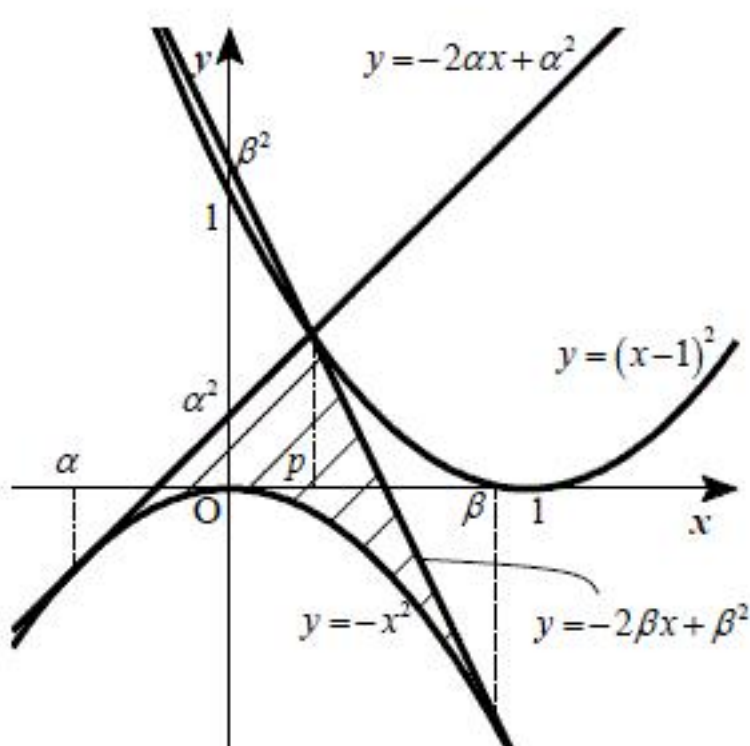
(証明終)

(3)

接点A、Bのx座標を α 、 β とおく。 $\alpha < \beta$ として一般性を失わない。このとき、 α 、 β は方程式①の2解であるから、解と係数の関係により、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2p \\ \alpha\beta = -(p-1)^2 \end{cases}$$

が成り立つ。



このとき、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^p \{(-2ax + a^2) - (-x^2)\} dx + \int_p^{\beta} \{(-2bx + b^2) - (-x^2)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^p (x - \alpha)^2 dx + \int_p^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^p + \left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3 \right]_p^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(p - \alpha)^3 - \frac{1}{3}(p - \beta)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right\}^3 - \frac{1}{3} \left\{ \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta \right\}^3 \\ &= \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12} \{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{12} \{ 4(2p^2 - 2p + 1) \}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \left\{ 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

であるから、

$$S^2 = \frac{4}{9} \left\{ 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\}^3$$

である。したがって、 $p = \frac{1}{2}$ のときに、 S^2 は最小値

$$\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{18}$$

をとる。

(答) S^2 の最小値 $\frac{1}{18}$ ($p = \frac{1}{2}$ のとき)