

(1)

M, N の x 座標をそれぞれ m, n とおくと, m, n は 2 次方程式,

$$\begin{aligned} 4x^2 + 3px + 5q &= 3x^2 + 2px + 4q \\ \Leftrightarrow x^2 + px + q &= 0 \end{aligned}$$

の 2 解であるから, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} m+n=-p \\ mn=q \end{cases}$$

である。M, N が異なる 2 点であることより, $m \neq n$ が成り立つので, 直線 MN の傾きは,

$$\begin{aligned} \frac{(4m^2 + 3pm + 5q) - (4n^2 + 3pn + 5q)}{m-n} &= 4(m+n) + 3p \\ &= -4p + 3p \\ &= -p \end{aligned}$$

となる。

(答) $-p$

(2)

$$m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = p^2 - 2q$$

であるから, OM = ON より,

$$\begin{aligned} OM^2 &= ON^2 \\ \Leftrightarrow m^2 + (4m^2 + 3pm + 5q)^2 &= n^2 + (4n^2 + 3pn + 5q)^2 \\ \Leftrightarrow m^2 - n^2 + \{(4m^2 + 3pm + 5q)^2 - (4n^2 + 3pn + 5q)^2\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-n)(m+n) + \{4(m^2 + n^2) + 3p(m+n) + 10q\} \{4(m^2 - n^2) + 3p(m-n)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-n) \left[(m+n) + \{4(m^2 + n^2) + 3p(m+n) + 10q\} \{4(m+n) + 3p\} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow (m+n) + \{4(m^2 + n^2) + 3p(m+n) + 10q\} \{4(m+n) + 3p\} &= 0 \quad (\because m \neq n) \\ \Leftrightarrow -p + \{4(p^2 - 2q) - 3p^2 + 10q\}(-4p + 3p) &= 0 \\ \Leftrightarrow -p - p(p^2 + 2q) &= 0 \\ \Leftrightarrow -p(p^2 + 2q + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + 2q + 1 = 0 \quad (\because p \neq 0) \\ \therefore q &= -\frac{1}{2}(p^2 + 1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $q = -\frac{1}{2}(p^2 + 1)$

2

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= \beta(a_n + \alpha b_n) \\ \Leftrightarrow b_n + \alpha \cdot \frac{a_n + b_n}{2} &= \beta a_n + \alpha \beta b_n \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\alpha - \beta\right)a_n + \left(1 + \frac{1}{2}\alpha - \alpha\beta\right)b_n &= 0 \end{aligned}$$

である。この式がすべての $n \geq 1$ に対して成り立てばよいので、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha - \beta = 0 & \dots\dots ① \\ 1 + \frac{1}{2}\alpha - \alpha\beta = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

となればよい。①より、

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha$$

であり、これを②に代入すると、

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha - 2) &= 0 \\ \therefore \alpha &= -1, 2 \end{aligned}$$

であるから、

$$(\alpha, \beta) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right), (2, 1)$$

となる。

$$(答) (\alpha, \beta) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right), (2, 1)$$

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= \beta(a_n + \alpha b_n) \\ &= \dots \\ &= \beta^n(a_1 + \alpha b_1) \\ &= \beta^n\left(3 + \frac{3}{2}\alpha\right) \end{aligned}$$

であるから、

$$a_n + \alpha b_n = \beta^{n-1}\left(3 + \frac{3}{2}\alpha\right)$$

である。したがって、 $(\alpha, \beta) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ のとき、

$$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(3 - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \dots\dots ③$$

であり、 $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ のとき、

$$a_n + 2b_n = 1^{n-1}\left(3 + \frac{3}{2} \cdot 2\right) = 6 \dots\dots ④$$

である。③、④を連立させて解くと、

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

$$(答) a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 2 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

であるが、この式を満たす自然数 n は存在しない。

(答) 存在しない

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x| \sin x - |0| \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = +0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x| \sin x - |0| \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (-\sin x) = +0$$

であるから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin x - |0| \sin 0}{x - 0} = +0$$

である。したがって、 $y = |x| \sin x$ は $x = 0$ で微分可能である。

(答) 微分可能

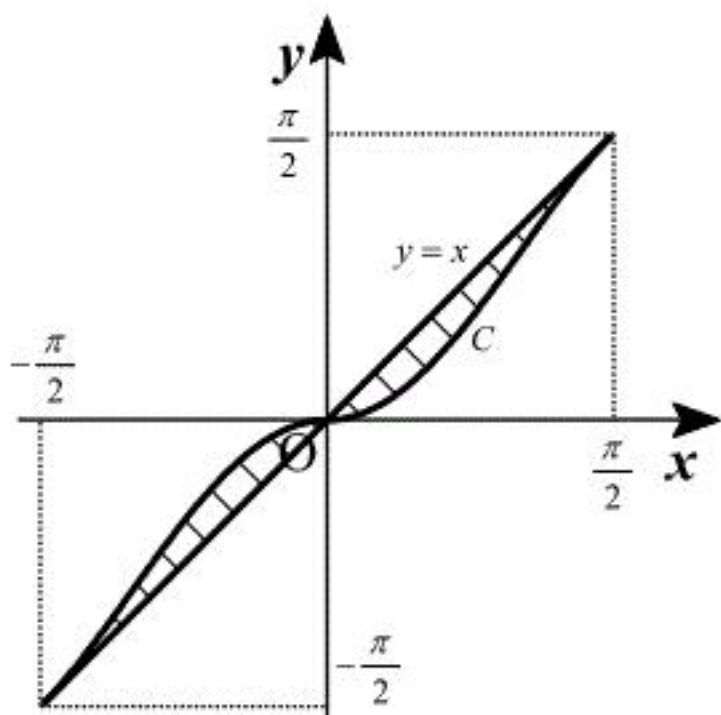
(2)

$$\begin{aligned} \int x \sin 2x dx &= -x \cdot \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)



曲線 C および直線 $y = x$ は原点对称なので、求める体積は、

$$\begin{aligned} 2 \left(\pi \int_0^{\pi/2} x^2 dx - \pi \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x dx \right) &= 2\pi \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2 x dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left(x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} (x^2 + x^2 \cos 2x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi/2} + \pi \left[x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} - \pi \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{24} \pi^4 - \pi \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{24} \pi^4 - \frac{1}{4} \pi^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{1}{24} \pi^4 - \frac{1}{4} \pi^2$$