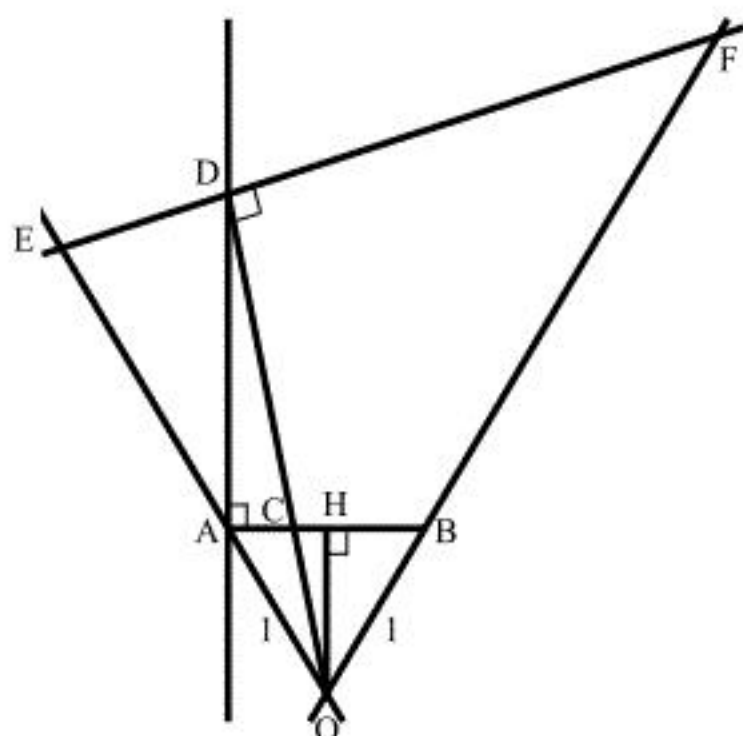




(1)

上図のように点 H を定めると、 $OH \parallel AD$ であるから、 $\triangle CAD \sim \triangle CHO$ である。

したがって、

$$(\triangle OCA \text{ の面積}) : (\triangle ACD \text{ の面積}) = 1 : 2$$

$$\Leftrightarrow CO:CD=1:2$$

$$\Leftrightarrow OH:AD=1:2$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OH} \\ &= \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$$\therefore m = 2, n = 1$$

となる。

(答) $m=2, n=1$

(2)

a, b を 0 でない実数とし,

$$\overrightarrow{OE} = a\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF} = b\overrightarrow{OB}$$

とおくと、

$$\overrightarrow{EF} = -a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$$

である。 $\overline{OD} \perp \overline{EF}$ であるから、

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (-a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2a|\overrightarrow{OA}|^2 + b|\overrightarrow{OB}|^2 + (-a+2b)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2a + b + (-a + 2b) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}a + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{5}{4}a \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

である。また、

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{2}{a}\overrightarrow{OE} + \frac{1}{b}\overrightarrow{OF}$$

であり、点 D は直線 EF 上にあるので、

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

である。この式に①を代入すると、

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{5a} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{5a} = 1$$

$$\therefore a = \frac{14}{5}$$

である。また、このとき、

$$b = \frac{7}{2}$$

であるから,

$$\overrightarrow{EF} = -\frac{14}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{7}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore s = -\frac{14}{5}, t = \frac{7}{2}$$

となる。

(答) $s = -\frac{14}{5}, t = \frac{7}{2}$

(1)

立方体 B_1 の対角線は、球 O_1 の直径となるから、

$$\begin{aligned}\sqrt{3}l_1 &= 2 \\ \therefore l_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad l_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2)

立方体 B_n の 1 辺の長さを l_n とする。

立方体 B_n の対角線の長さは、球 O_n の直径に等しいので、

$$\sqrt{3}l_n = 2r_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、立方体 B_n の 1 辺の長さは、球 O_{n+1} の直径に等しいので、

$$l_n = 2r_{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②より、 l_n を消去すると、

$$r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} r_n$$

である。したがって、 $r_1 = 1$ であるから、

$$r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n-1}$$

(3)

球 O_n の体積は、

$$V_n = \frac{4}{3} \pi r_n^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{3n-3}$$

であるから、

$$\begin{aligned}S_k &= \sum_{n=1}^k V_n \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{3n-3} \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \right)^k}{1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}} \\ &= \frac{4\pi}{3 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \right)^k \right\} \\ &= \frac{4\sqrt{3}\pi}{3\sqrt{3} - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \right)^k \right\} \\ &= \frac{18 + 2\sqrt{3}}{13} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \right)^k \right\} \pi\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{18 + 2\sqrt{3}}{13} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \right)^k \right\} \pi = \frac{18 + 2\sqrt{3}}{13} \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{18 + 2\sqrt{3}}{13} \pi$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x| \sin x - |0| \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = +0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x| \sin x - |0| \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (-\sin x) = +0$$

であるから、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin x - |0| \sin 0}{x - 0} = +0$$

である。したがって、 $y = |x| \sin x$ は $x = 0$ で微分可能である。

(答) 微分可能

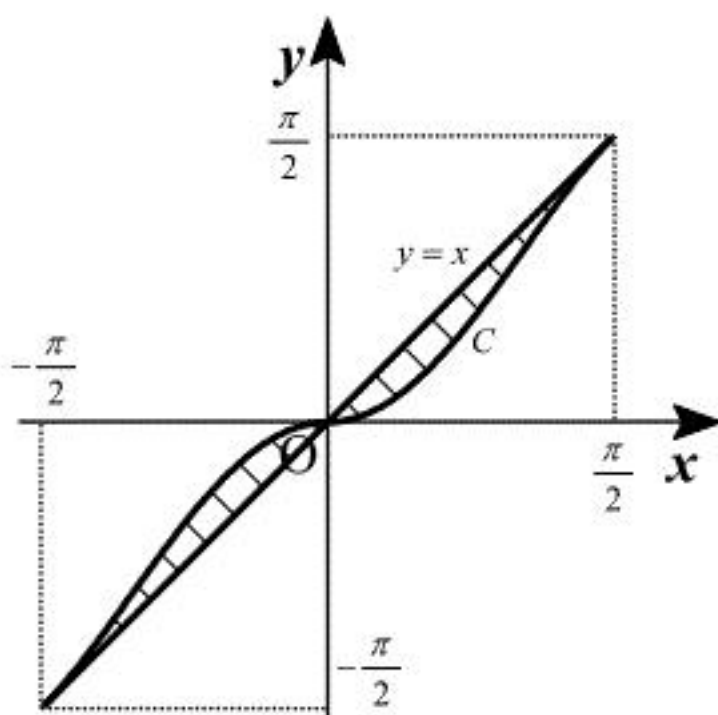
(2)

$$\begin{aligned} \int x \sin 2x dx &= -x \cdot \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)



曲線 C および直線 $y = x$ は原点对称なので、求める体積は、

$$\begin{aligned} 2 \left(\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx \right) &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + x^2 \cos 2x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi \left[x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{24} \pi^4 - \pi \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{24} \pi^4 - \frac{1}{4} \pi^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{1}{24} \pi^4 - \frac{1}{4} \pi^2$$

(1)

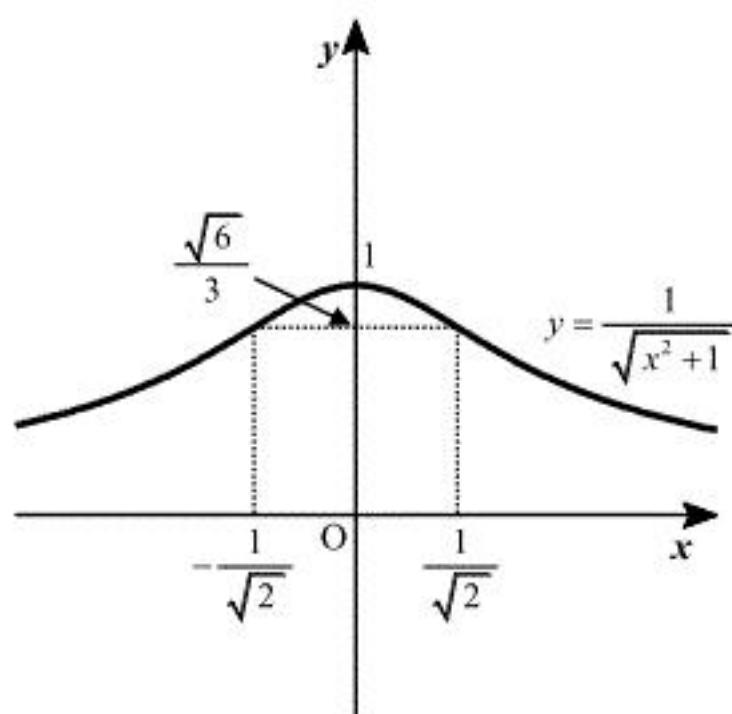
$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\
 &= -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\
 y'' &= -\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+1)^3} \\
 &= \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0
 \end{aligned}$$

であるから、関数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ の増減・グラフの凹凸は次のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(∞)
y'		+		+	0	-		-	
y''		+	0	-		-	0	+	
y	(0)	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\searrow$	(0)

上表より、関数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ は $x=0$ のとき極大値 1 をとる。

また、グラフは次のようになる。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} - a \\
 &= \frac{\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)(x - \sqrt{x^2+1})}{x^2 - (x^2+1)} - a \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - a
 \end{aligned}$$

である。ここで、関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ が極値をもつためには、 $y' = 0$ となる x が存在し、

その x の前後で y' の符号が逆になればよい。(1)より、 $0 < \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$ であるから、 $y' = 0$ と

なる x が存在する a の範囲は $0 < a \leq 1$ であるが、 $a = 1$ のとき $y' = 0$ となる $x (= 0)$ の前後で y'

の符号は変化しない。したがって、関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ が極値をもつような a の範囲は

$0 < a < 1$ となる。

(答) $0 < a < 1$

(3)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \\
 &= \left[\log(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 \\
 &= \log(1 + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) = \log(1 + \sqrt{2})$$