

平成 23 年度入試
個別学力試験問題（前期日程）

数 学
(数理・情報システム学科)

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
2. 問題紙は 2 ページ，解答用紙は 4 枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
4. 解答用紙の裏面は使わないこと。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときは，小問の結論を明示すること。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ること。

1 平面上に一辺の長さが 1 の正三角形 OAB と、辺 AB 上の点 C があり、 $AC < BC$ とする。点 A を通り直線 AB に直交する直線 k と、直線 OC との交点を D とする。 $\triangle OCA$ と $\triangle ACD$ の面積の比が $1:2$ であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ となる m, n を求めよ。
- (2) 点 D を通り、直線 OD と直交する直線を ℓ とする。 ℓ と直線 OA, OB との交点をそれぞれ E, F とするとき、 $\overrightarrow{EF} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ となる s, t を求めよ。

2 半径 1 の球を O_1 とし、球 O_1 に内接する立方体を B_1 とする。次に立方体 B_1 に内接する球を O_2 とし、球 O_2 に内接する立方体を B_2 とする。以下この操作を繰り返してできる球を O_n 、立方体を B_n ($n = 3, 4, \dots$) とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 立方体 B_1 の 1 辺の長さ l_1 を求めよ。
- (2) 球 O_n の半径 r_n を n を用いて表せ。
- (3) 球 O_n の体積を V_n とし、 $S_k = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ とするとき、 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = |x| \sin x$ の $x = 0$ における微分可能性を調べよ。
- (2) 不定積分 $\int x \sin 2x \, dx$ を求めよ。
- (3) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で、曲線 $C : y = |x| \sin x$ を考える。 C と直線 $y = x$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ の増減、極値、グラフの凹凸を調べ、そのグラフの概形をかけ。
- (2) 関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) - ax$ が極値をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2 + n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right)$ を求めよ。